Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 13

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 47a und b, 48 a - c

Aufgabe 46

Sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie: Wenn man in einer Basis $v_1, ..., v_n$ von V ein v_k durch $av_k + bv_j$ ersetzt (wobei $k, j \in \{1, ..., n\}$, $a, b \in K$, $k \neq j$, $a \neq 0$), dann erhält man wieder eine Basis von V. **Hinweis:** Definition auf S. 16.10 der Vorlesung beachten. Zusatzfrage: Wie viele verschiedene Basen von V gibt es also?

Aufgabe 47

Betrachten Sie den Vektorraum (bzw. Funktionenraum) V aus Aufgabe 45 bzw. das Beispiel 2.) aus Kap. 16.1 der Vorlesung.

a) Überlegen Sie sich eine Basis von V und bestimmen Sie die Dimension von V.

b) Zeigen Sie: Mit $\langle f|g\rangle := \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)\, w(x)$ für eine beliebige positive Funktion $w : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto w(x) > 0$ wird V zu einem Hilbertraum.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V für $n = 2$, $w(x) = 1$, $a = 0$, $b = 2$ mittels des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus der Vorlesung. **Hinweis:** Hier braucht man die Vorlesung vom 3. Juli.

Aufgabe 48

Sei V ein Hilbertraum über K, d.h. ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle u|v\rangle$ für beliebige $u, v \in V$. Ferner sei $\|v\| := \langle v|v\rangle^{1/2}$ die Norm von v. Zeigen Sie:

a) $\|v\| > 0$ falls $v \neq 0$ und $\|v\| = 0$ falls $v = 0$,

b) $\|a\, v\| = a\, \|v\|$ für alle $v \in V$ und $a \in K$.

c) Für zwei beliebige orthogonale Vektoren $u, v \in V$ gilt $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Satz des Pythagoras).

d) Für zwei beliebige $u, v \in V$ gilt $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung). **Hinweis:** Cauchy-Schwarz-Ungleichung benutzen.