Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 11

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 37a und b, 38a, 39a, 40
Hinweis: für 37c, 37d, 39c braucht man die Vorlesung vom 19. Juni.

Aufgabe 37

Betrachten Sie Kugelkoordinaten r, ϑ, φ im $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie* den Gradienten eines Skalarfeldes $\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$.

b) Bestimmen Sie* die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{f} = f_r \vec{e}_r + f_\vartheta \vec{e}_\vartheta + f_\varphi \vec{e}_\varphi$ (Argumente (r, ϑ, φ) weggelassen)

c) Bestimmen Sie* den Laplace-Operator gemäss $\triangle\Phi := \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)$ für ein Skalarfeld $\Phi = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$.

d) Bestimmen Sie* die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{f}$ wie in b).

*Das Endergebnis steht in der am 19. Juni verteilten Tabelle, gibt aber alleine noch keine Punkte!

Aufgabe 38

a) Das Vektorfeld $\vec{f}$ verschwinde auf dem Rand des Volumens V. Berechnen Sie $\int_V dV\, \mathrm{div}\vec{f}$.

b) Beweisen Sie den sog. *Green'schen Integralsatz*:
$\int_V dV\, (\phi(\vec{x}) \triangle\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \triangle\phi(\vec{x})) = \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\phi(\vec{x})\, \mathrm{grad}\, \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x})\, \mathrm{grad}\, \phi(\vec{x}))$
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 32c und den Satz von Gauß.

Aufgabe 39

Betrachten Sie ein beliebiges, orthogonales, rechtshändiges Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$.

a) Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla}\Phi(\vec{u}) = \mathrm{grad}\,\Phi(\vec{u})$ für beliebige Skalarfelder?

b) Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{u}) = \mathrm{div}\vec{f}(\vec{u})$ für beliebige Vektorfelder?

c) Wie muss man den Vektoroperator $\vec{\nabla}$ definieren, damit $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{u}) = \mathrm{rot}\vec{f}(\vec{u})$ für beliebige Vektorfelder?

d) Wann lässt sich also ein sinnvoller Nabla-Operator definieren?

Aufgabe 40

Berechnen Sie $\int\limits_B dx_1 dx_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ wenn B das Gebiet mit $x_1^2 + x_2^2 \leq 16$ ist.
Hinweis: Transformation auf Polarkoordinaten wie in der Vorlesung vorgeführt.