Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 | Übungsblatt 10

`http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html`

Schriftlich abzugeben sind: 34a und b, 35a und b, 36a

Hinweis: Für Zylinderkoordinaten wurde dasselbe wie in Aufgabe 34 und 35 bereits in der Vorlesung gemacht.

Aufgabe 34

Betrachten Sie Kugelkoordinaten r, ϑ, φ im $\mathbb{R}^3$ (siehe Seite 15.3 in der Vorlesung).

a) Bestimmen Sie die metrischen Koeffizienten h_r, h_ϑ, h_φ und die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ eine orthonormierte, rechtshändige Basis ist und veranschaulichen Sie den Sachverhalt anhand einer Skizze.

c) Stellen Sie den Vektor $\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi)$ mittels der Basis $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ dar.

d) Nehmen Sie an, dass r, ϑ, φ von der Zeit t abhängige Funktionen sind. Bestimmen Sie $\dot{\vec{e}}_r$, $\dot{\vec{e}}_\vartheta$, $\dot{\vec{e}}_\varphi$ und drücken Sie diese mittels $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ aus.

e) Betrachten Sie $\vec{r}(t) = \vec{r}(r(t), \vartheta(t), \varphi(t))$ und stellen Sie $d\vec{r}(t)/dt$ mittels der Basis $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ dar. **Hinweis:** c) und d) benutzen.

Aufgabe 35

a) Bestimmen Sie das Flächenelement $d\vec{A}$ auf einer Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten und interpretieren Sie das Resultat geometrisch anhand einer Skizze.

b) Bestimmen Sie das Volumenelement dV in Kugelkoordinaten und interpretieren Sie das Resultat geometrisch anhand einer Skizze.

– bitte wenden –

Aufgabe 36

Das Volumen $\tilde{V}(T,p)$ eines Systems (z.B. eines Gases) sei eine Funktion der Temperatur T und des Druckes p, die sowohl nach T als auch nach p auflösbar ist, d. h. es existieren (Umkehr-)Funktionen $\tilde{T}(V,p)$ und $\tilde{p}(T,V)$ mit den Eigenschaften
(i) $\tilde{V}(\tilde{T}(V,p),p) = V$ für alle (physikalisch sinnvollen) V und p,
(ii) $\tilde{V}(T,\tilde{p}(T,V)) = V$ für alle (physikalisch sinnvollen) T und V.

a) Zeigen Sie durch Ableiten von (i) nach V: $\frac{\partial\tilde{V}(\tilde{T}(V,p),p)}{\partial T} = \left(\frac{\partial\tilde{T}(V,p)}{\partial V}\right)^{-1}$

b) Zeigen Sie durch Ableiten von (ii) nach T: $\frac{\partial\tilde{V}(\tilde{T},p(T,V))}{\partial p}\,\frac{\partial\tilde{p}(T,V)}{\partial T}\,\frac{\partial\tilde{T}(V,p(T,V))}{\partial V} = -1$

c) Was spricht dafür und was dagegen, die Bezeichnung $\tilde{V}(T,p)$ durch $V(T,p)$ zu ersetzen (und analog für $\tilde{T}$ und $\tilde{p}$)?