Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 7

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: 23a,b, 24a,b, 25

Aufgabe 23

a) Bestimmen Sie ein Vektorpotential $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so, dass $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \vec{B}$, wo $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ konstant. **Hinweis:** Machen Sie den Ansatz $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$.

b) Bestimmen Sie α, $\beta \in \mathbb{R}$ in $\vec{g}(\vec{x}) := \vec{e}_1(x_1 + \alpha x_2) + \vec{e}_2(x_2 + \beta x_1) + \vec{e}_3 x_3$ so, dass $\vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$.

c) Bestimmen Sie für diese α, β ein skalares Potential $\Phi(\vec{x})$ mit $\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x})$.

Aufgabe 24

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar und $\triangle := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Aufgabe 3b).

a) Zeigen Sie: $\triangle f(|\vec{x}|) = \frac{n-1}{|\vec{x}|} f'(|\vec{x}|) + f''(|\vec{x}|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{x}| \neq 0$.
Hinweis: Aufgabe 19b.

b) Bestimmen Sie eine Lösung der Laplace-Gleichung $\triangle\Phi(\vec{x}) = 0$ der Form $\Phi(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{x}| \neq 0$, $n = 1, 2, 3, ...$

c) Für welche Dimension n löst $\Phi(\vec{x}) := e^{-a|\vec{x}|}/|\vec{x}|$, $a > 0$, die sog. Yukawa-Gleichung $(-\triangle + m)\,\Phi(\vec{x}) = 0$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{R}^+$?

Aufgabe 25

Der Weg $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und $\vec{\nabla}$ bezeichne den Nabla-Operator im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{dG(\vec{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial G(\vec{r}(t), t)}{\partial t} + \vec{\nabla} G(\vec{r}(t), t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

(sog. substantielle Ableitung). **Hinweis:** S. 14.43 in der Vorlesung.

Aufgabe 26

Zeigen Sie: $\vec{f}(\vec{x})$ ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Wege.
Hinweis: Zweitletzte Zeile auf S. 14.50 der Vorlesung darf benutzt werden.