Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 5

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Schriftlich abzugeben sind: a und b in jeder Aufgabe

Aufgabe 17

Betrachen Sie das Skalarfeld $\phi(x_1, x_2) := \int_a^{x_1} dy\, f(y, x_2)$, den Weg $\vec{r}(t) := r_1(t)\,\vec{e}_1 + r_2(t)\,\vec{e}_2$ und die Funktion $F(t) := \phi(\vec{r}(t))$.

a) Verifizieren Sie $\frac{\partial\phi(x_1,x_2)}{\partial x_1} = f(x_1, x_2)$ und $\frac{\partial\phi(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \int_a^{x_1} dy\, \frac{\partial f(y,x_2)}{\partial x_2}$.
Hinweis: Kapitel 13.1 und 13.2.

b) Was folgt damit für die totale Ableitung $\frac{dF(t)}{dt}$ (vgl. Seite 13.9 der Vorlesung).

c) Was folgt damit für $\frac{d}{dt}\int_a^{r_1(t)} dy\, f(y, r_2(t))$ und speziell für $\frac{d}{dt}\int_a^t dy\, f(y,t)$?

d) Bestimmen Sie die Ableitung von $\int_0^x dy\, \frac{\sin(xy)}{y}$ nach x.

Aufgabe 18

Wir betrachten eine Fäche $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \supset T \to B \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u})$ der speziellen Form $\vec{r}(\vec{u}) = \vec{e}_1 u_1 + \vec{e}_2 u_2 + \vec{e}_3\, f(u_1, u_2)$ mit einem Skalarfelder $f(x_1, x_2)$ (siehe auch Aufg. 1). Das Flächenstück $B := \{\vec{r}(\vec{u})\,|\,\vec{u} \in T\}$ kann somit auch als Graph der Funktion $f(\vec{x})$ oder als Lösungsmenge der Gleichung $x_3 = f(x_1, x_2)$ betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie $\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}$ und $\left|\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}\right|$

b) Wie lässt sich damit der Flächeninhalt A_B von B schreiben? Vergleiche mit Aufg. 10.

c) Berechnen Sie A_B für $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{3/2}$ und $T = [0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 19

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie den Gradienten von

a) $\Phi(\vec{x}) := f(\vec{a} \cdot \vec{x})$, wo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest. (Resultat: $\vec{a}\, f'(\vec{a} \cdot \vec{x})$.)

b) $\Phi(\vec{x}) := f(|\vec{x}|)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. (Resultat: $\vec{e}_x\, f'(|\vec{x}|)$ mit $\vec{e}_x := \vec{x}/|\vec{x}|$.)

c) $\Phi(\vec{x}) := \ln(|\vec{x}|)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

d) $\Phi(\vec{x}) := |\vec{x}|^q$, $q \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

e) $\Phi(\vec{x}) := (\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$, wo $\vec{a}$, $\vec{b}$ beliebig aber fest und $\vec{x}$, $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.