Rechenmethoden der Physik 2

SoSe 2024 — Übungsblatt 1

http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP2.html

Dies ist das erste Übungsblatt zu Rechenmethoden der Physik 2, aber noch zum Inhalt von Rechenmethoden der Physik 1. Ausnahmsweise ist keine Aufgabe schriftlich abzugeben, d.h. es sind alles Ankreuzaufgaben für die Tutorien am 12.04.2024 (erste Vorlesungswoche).

Aufgabe 1

a) Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, wie man das Skalarfeld $f(x_1, x_2) := 2 - x_1 - x_2/2$ anschaulich darstellen könnte.

Hinweis: Wenn Ihnen gar nichts einfallen will, ist dies eine gute Gelegenheit, in das Buch von Weltner hineinzuschauen (siehe Literaturangaben zur RdP1).

b) Dasselbe für das Skalarfeld $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$.

Hinweis: Mit $\vec{x} := (x_1, x_2)$ folgt $x_1^2 + x_2^2 = |\vec{x}|^2$, vgl. S. 4.12 in den Vorlesungsnotizen (Vorkurs).

c) Dasselbe für das Vektorfeld $\vec{f}(x_1, x_2) := \frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Zeige und benutze $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{2|\vec{x}|}\vec{x}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Skalarfeld $\phi(\vec{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, mit $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)$.
Berechnen Sie

a) $\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_i^2}$ für $i = 1, 2, 3$.

b) $\frac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2}$ und $\frac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1}$

Aufgabe 3

Gegeben sei das Skalarfeld $f(\vec{x}) := x_1^3 + 2x_1x_2x_3$ mit $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)$. Bestimmen Sie

a) Das Vektorfeld $\operatorname{grad}(f(\vec{x})) := \begin{pmatrix} \partial f(\vec{x})/\partial x_1 \\ \partial f(\vec{x})/\partial x_2 \\ \partial f(\vec{x})/\partial x_3 \end{pmatrix}$ (genannt „Gradient von f“).

b) Das Skalarfeld $\Delta f(\vec{x}) := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\vec{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\vec{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(\vec{x})$

Bemerkung: Δ nennt man den Laplace-Operator.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Wir betrachten dieselben Differentialgleichungen wie auf Seite 12.19 der Vorlesung und verwenden auch dieselben Bezeichnungen und Definitionen wie dort. Zeigen Sie:

a) Wenn z_k eine j-fache Nullstelle $(1 \leq j \leq n)$ des charakteristischen Polynoms $P(z)$ ist, dann gilt $P(z) = (z - z_k)^j\, Q(z)$ für einem geeignet gewähltes "Hilfspolynom" $Q(z)$ mit der Eigenschaft $Q(z_k) \neq 0$.

b) Folgern Sie, dass $d^\nu P(z_k)/dz^\nu = 0$ für $\nu = 0, 1, ..., j-1$ und $d^j P(z_k)/dz^j \neq 0$.
Hinweis: Erst mal mit $j = 1, \nu = 0, 1$ beginnen, dann $j = 2, \nu = 0, 1, 2$ usw.

c) Betrachten Sie das Skalarfeld $f(x, z) := e^{zx}$ und zeigen Sie, dass $\partial^\nu f(x, z)/\partial z^\nu = x^\nu e^{zx}$ für beliebige $\nu \in \mathbb{N}_0$.

d) Folgern Sie, dass $y_\nu(x) := x^\nu e^{z_k x}$ für jedes $\nu = 0, 1, ..., j-1$ eine Lösung der betrachteten Differentialgeichung ist.

e) Rechtfertigen Sie den Ansatz ganz unten auf Seite 12.29 der Vorlesung.