18 Fouriertransformation

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ so, dass

$$\boxed{\tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-ikx} \; f(x)}$$

für alle $k \in \mathbb{R}$ existiert: sog. Fouriertransformation (FT).

$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto \tilde{f}(k)$ heisst Fouriertransformierte (FT) von $f(x)$.

Alternativ:

- e^{+ikx}, $\dfrac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, ... statt e^{-ikx}

- $f(k)$, $FT(f)$, $F\{f(x)\}$, ... statt $\tilde{f}(k)$

- $\int$ statt $\int_{-\infty}^{+\infty}$

<u>Beisp:</u> $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$ (Gauß-Verteilung).

Bem: ist normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = 1$ (vgl. Kap. 15.3', S. 15.14''').

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-Q}}$$

$$Q = ikx + \frac{x^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\Big(\underbrace{x^2 + 2\sigma^2 ikx + (\sigma^2 ik)^2}_{(x+i\sigma^2 k)^2} \underbrace{- (\sigma^2 ik)^2}_{+\sigma^4 k^2}\Big)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}\, G(i\sigma^2 k)$$

$$G(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+z)^2}}_{f(x+z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\, f_k$$

$$f_k := \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{d^k}{dx^k} f(x)}_{} = \begin{cases} 1 \text{ falls } k=0 \text{ (Normierung)} \\ 0 \text{ falls } k \geq 1 \end{cases}$$

falls $k \geq 1$: $= \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \text{Polynom}(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}}}$$

18.1 Hauptsatz

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{+ikx}\,\hat{f}(k) = f(x)}$$

sog. Fourier-Rück- oder -Umkehr-Transf.

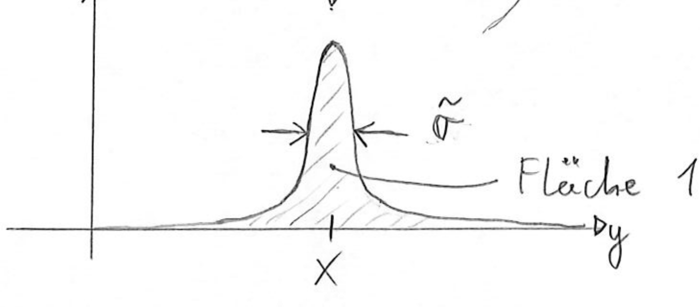
„Bew": $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int dk\; e^{ikx}\,\underbrace{\hat{f}(k)}_{\int dy\, e^{-iky} f(y)}$ $\quad\Big|$ multipliziere mit $\displaystyle \lim_{\sigma\to\infty} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} = 1$

$$= \lim_{\sigma\to\infty}\int dy\, f(y)\,\underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi\sigma^2}}_{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}}}\;\underbrace{\int dk\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}k^2 + ik(x-y)}}_{\text{wie oben } = e^{-\frac{\sigma^2(x-y)^2}{2}}}$$

$\tilde{\sigma} := \frac{1}{\sigma}$

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{\tilde{\sigma}\to 0}\int dy\, f(y)\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}} \overset{\uparrow}{=} f(x) \quad \square$$

falls $f(y)$ hinreichend „zahm"



Folgerungen:

- $f(x) \leftrightarrow \hat{f}(k)$ ein-eindeutig : keine Info verloren !

- $f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2\pi} \int dk \, e^{ikx} \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dk \, e^{ikx} \underbrace{ik\hat{f}(k)}$

muss FT von $f'(x)$ sein, da ein-eind. !

$\Rightarrow$ die FT von $f'(x)$ ist $ik\hat{f}(k)$

„ableiten im direkten Raum $\hat{=}$ multiplizieren im Fourierraum"

$\Rightarrow$ FT von $f''(x)$ ist $\underbrace{(ik)^2}_{-k^2} \hat{f}(k)$ usw

18.2 Verallgemeinerungen

1.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(\vec{x})$ so, dass

$$\tilde{f}(\vec{k}) := \int d^n x \; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, f(\vec{x})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, e^{-ik_1 x_1} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-ik_n x_n} \, f(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ existiert („n-dim. FT“).

$\Rightarrow$ Rücktrafo :

$$\underline{\underline{\frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n k\, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \tilde{f}(\vec{k})}} =$$

$$\hookrightarrow \int d^n y\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}}\, f(\vec{y})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_1 \int dy_1\, e^{ik_1(x_1-y_1)} \cdots \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk_n \int dy_n\, e^{ik_n(x_n-y_n)}\, f(y_1,\dots,y_n)}$$

$y_1 \dots y_{n-1}$ „fest"

$\Rightarrow f$ „gewöhnliche Fkt" von y_n allein

$$\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} f(y_1,\dots,y_{n-1},x_n)$$

$\dots$ (alles ausser y_k fest $\Rightarrow f(y_1,\dots,y_{k-1},x_k,\dots,x_n)$

$$\underline{\underline{= f(\vec{x})}}$$

Folgerungen

- $f(\vec{x}) \leftrightarrow \tilde{f}(\vec{k})$ ein-eind.

- $$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \hat{f}(\vec{k})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} i \underbrace{\vec{k}\cdot\vec{x}}_{=k_1x_1+\dots+k_nx_n}\right)}_{=ik_j} \hat{f}(\vec{k})$$

$\Rightarrow$ die FT von $\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})$ ist $ik_j \hat{f}(\vec{k})$

$\Rightarrow$ die FT von $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot f(\vec{x})$ $\quad \Big| \; \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ in kart. Koord.

ist $\sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j \left(ik_j \hat{f}(\vec{k})\right) = i\vec{k}\, \hat{f}(\vec{k})$

2.) Für Vektorfelder

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m \quad , \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

wie immer alles „komponentenweise":

$$\underline{\underline{\vec{\tilde{f}}(\vec{k}) := \int d^n x \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \vec{f}(\vec{x})}} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(\vec{k}) \\ \vdots \\ \hat{f}_m(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \, e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, \vec{\tilde{f}}(\vec{k})}}$$

<u>Folgerungen</u>

- Für $m=n$: $\underline{\underline{\text{die FT von } \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \text{ ist } i\vec{k}\cdot\vec{\tilde{f}}(\vec{k})}}$
- Für $m=n=3$: $\underline{\underline{\text{die FT von } \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{x}) \text{ ist } i\vec{k}\times\vec{\tilde{f}}(\vec{k})}}$

Bew: selbst !

18.10

Weitere Folgerung

Sei $\vec{f} \in \mathbb{R}^3$ [Vektor, nicht VF!],

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \vec{0}$, $k := |\vec{k}|$

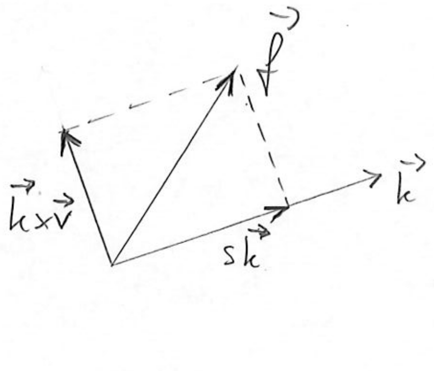
$$s := \frac{\vec{f}\cdot\vec{k}}{k^2} , \quad \vec{v} := \frac{\vec{f}\times\vec{k}}{k^2}$$

RdP 1, Ü 20d: für bel. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{k}\times\vec{v} = \frac{\vec{k}\times(\vec{f}\times\vec{k})}{k^2} = \frac{\vec{f}\,\overbrace{(\vec{k}\cdot\vec{k})}^{k^2}}{k^2} - \frac{\vec{k}\,(\vec{f}\cdot\vec{k})}{k^2} = \vec{f} - \vec{k}\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\vec{f} = \underbrace{s\vec{k}}_{\parallel \vec{k}} + \underbrace{\vec{k}\times\vec{v}}_{\perp \vec{k}}}}$$



Für $\vec{f} = \vec{f}_1 + i\vec{f}_2 \in \mathbb{C}^3$ ebenso (mit $s = s_1 + is_2$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$)

Jetzt : $\vec{f} := \vec{\tilde{f}}(\vec{k}) \Rightarrow s = s(\vec{k})$, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{k})$

18.11

$\Rightarrow$ zu jedem $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit FT $\vec{\tilde{f}}(\vec{k})$ existiert

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) := \frac{s(\vec{k})}{i} \quad \text{und} \quad \vec{\tilde{A}}(\vec{k}) := \frac{\vec{v}(\vec{k})}{i} \quad \text{mit}$$

$$\vec{\tilde{f}}(\vec{k}) = i\vec{k}\,\tilde{\phi}(\vec{k}) + i\,\vec{k} \times \vec{\tilde{A}}(\vec{k})$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{FT ein-eindeutig!}}}{\Longleftrightarrow}$ es existieren $\phi(\vec{x})$ und $\vec{A}(\vec{x})$ mit

$$\underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{grad}\phi(\vec{x}) + \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x})}}$$

$\underline{\underline{\text{Falls } \operatorname{rot}\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \;\forall \vec{x}}} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{\tilde{f}}(\vec{k}) = \vec{0} \;\forall \vec{k} \Rightarrow \vec{v}(\vec{k}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\tilde{A}}(\vec{k}) = \vec{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FT ein-eind.!}}}{\Rightarrow} \vec{A}(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{grad}\phi(\vec{x})}}$$

$\underline{\underline{\text{Falls } \operatorname{div}\vec{f}(\vec{x}) = 0}} \Rightarrow$ ... analog ... $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{x})}}$

Damit <u>Sätze 1-3 aus Kap. 14.7 bewiesen!</u>