17. 2 Hauptsatz

Betrachte $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

f stetig diff'bar $\Big\}$ d.h. $f \in C^1(-\pi, \pi)$

$f(-\pi) = f(\pi)$ d.h. f 2π-periodisch

$C^1_{2\pi}$:= Menge aller solcher Fkt'en $\Rightarrow$ ist VR über $\mathbb{R}$ (erfüllt Axiome).

Def:

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

ist Skalarprodukt (erfüllt Axiome).

$\Rightarrow$ $C^1_{2\pi}$ ist HR über $\mathbb{R}$.

~

Betrachte:

$$v_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_2(x) := \cos(x), \quad v_3(x) := \sin(x),$$

$$v_4 := \cos(2x), \quad v_5(x) := \sin(2x), \ldots$$

$$v_{k=2n}(x) := \cos(nx), \quad v_{k=2n+1}(x) := \sin(nx), \ldots \quad \in C^1_{2\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\langle v_j | v_k \rangle}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_j(x) v_k(x) \, dx \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\delta_{jk}}} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}$$

RdP 1, Ü 36 & 39

Hauptsatz: $\underline{\underline{\underbrace{v_1, v_2, \ldots}_{\text{unendl. Folge}} \text{ ist ONB von } C^1_{2\pi}}}$

unendl. Folge $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\dim(C^1_{2\pi}) = \infty}}$

Strenger Bew: schwierig, weggelassen.

Anschauliche Begründung: später (Kap. 17.4)

Mit Kap. 16.4 folgt:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k \quad , \quad f_k = \langle v_k | f \rangle \quad \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)}$$

sog. Fourierreihe (FR), mit

$$\boxed{a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \cos(nx) \, f(x)} \qquad (n \geq 0)$$

$$\boxed{b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \sin(nx) \, f(x)} \qquad (n > 0)$$

sog. Fourierkoeffizienten.

- gilt für jedes $f \in C^1_{2\pi}$, insbes. konvergiert FR $\forall x \in [-\pi, \pi]$

  und ist 2π- per.

- sog. Fourier-analyse, -zerlegung, -synthese

  [↳ Spektralanalyse von Sternen] [↳ Synthesizer]

- Verallg. für andere Funktionenräume möglich [grosses Thema der Mathem.]

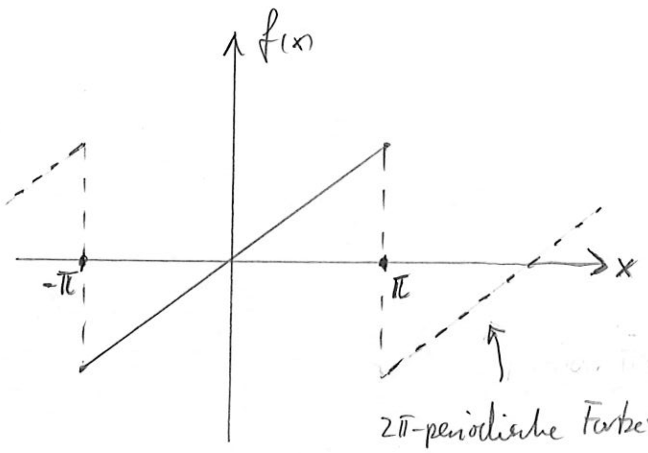
  ⇒ für jede physikalisch relevante (periodische) Fkt o.k.

Beisp:

$f(x) := x \quad \forall\, x \in (-\pi, \pi)$

$f(\pm\pi) := 0$

(etwas allgemeiner als $C^1_{2\pi}$)



2π-periodische Fortsetzung ist optional!

$$\underline{\underline{a_n}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \underbrace{\underbrace{\cos(nx)}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{x}_{\text{ungerade Fkt von } x}}_{\text{ungerade}} = \underline{\underline{0}}$$

part. Integr.

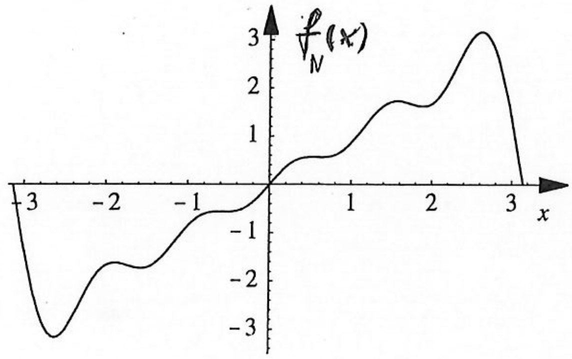
$$\underline{\underline{b_n}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \underbrace{\sin(nx)}_{=: u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{=: v(x)} \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{\pi} u(x)\, v(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; u(x)\, v'(x)$$

$$\Rightarrow \; u(x) = -\frac{1}{n} \cos(nx) \;, \quad v'(x) = 1$$

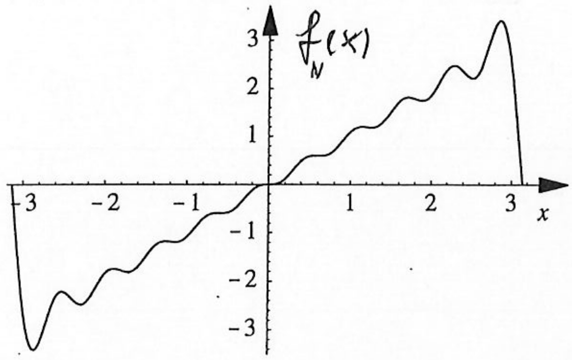
$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi n} \cos(nx) \cdot x \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{-\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n \pi - (-1)^n(-\pi)\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} 2\pi} + \frac{1}{\pi n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(nx)}_{\frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0} = \underline{\underline{(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)}}$$

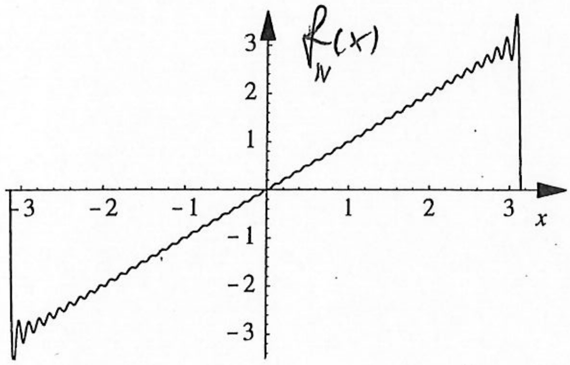
$$f_N(x) := 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$



$N = 5$



$N = 10$



$N = 50$

17.3 Komplexe Fourierreihen

Bisher:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\cos(nx)}_{\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}} + b_n \underbrace{\sin(nx)}_{\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}}\Big) \qquad \text{[alles reell]}$$

$$\frac{a_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n}{2}e^{-inx} + i\frac{b_n}{2}e^{-inx} - i\frac{b_n}{2}e^{inx}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx}} \qquad \text{(komplexe FR)}$$

$$f_0 := \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)$$

$$f_{n>0} := \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \underbrace{\big(\cos(nx) - i\sin(nx)\big)}_{\cos(-nx)+i\sin(-nx) = e^{-inx}} f(x)$$

$$f_{n<0} := \frac{a_{-n}}{2} + i\frac{b_{-n}}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \underbrace{\big(\cos(-nx) + i\sin(-nx)\big)}_{e^{-inx}} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-inx} f(x)} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Bem:

- Im Allg. $f_n \in \mathbb{C}$

- Betrachte $f(x) := f_1(x) + i f_2(x)$ mit $f_{1,2} \in C^1_{2\pi}$.

  $\tilde{C}^1_{2\pi}$:= Menge aller solchen Fkt'en $f(x)$.

  $\Rightarrow$ obige Formeln gelten $\forall f_{1,2} \in C^1_{2\pi}$, also auch $\forall f \in \tilde{C}^1_{2\pi}$.

- Mit

$$\underline{\underline{\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) g(x) \, dx}}$$

wird $\tilde{C}^1_{2\pi}$ HR über $\mathbb{C}$.

- Mit $\underline{\underline{v_n(x) := e^{inx}}}$ folgt:

$$\langle v_n | v_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{-inx} e^{imx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RdP1, Ü 36a}}}{=} \delta_{nm}$$

- Mit $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \underbrace{e^{inx}}_{v_n(x)}$ und

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \underbrace{e^{-inx}}_{v_n^*(x)} f(x) = \langle v_n | f \rangle \quad \text{folgt}$$

$$\underline{\underline{\left\{ v_n(x) \right\}_{n=-\infty}^{+\infty} \text{ ist ONB in } \tilde{\hat{C}}^1_{2\pi}}}$$

- Umgekehrt: daraus folgt auch wieder Hauptsatz aus Kap. 17.2.

17.4 Anschaulicher Beweis

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_n}_{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{-iny} f(y)} \underbrace{v_n(x)}_{e^{inx}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dy\, f(y)\, \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(x-y)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dy\, f(y)\, \delta_N(x-y) \overset{?}{=} f(x) \quad (\text{zu zeigen})$$

$$\delta_N(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{\overbrace{inx}^{i(N+n)x - iNx}} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{e^{-iNx}}_{\frac{e^{-ix(2N+1)/2}}{e^{-ix/2}}} \underbrace{\sum_{n=0}^{2N} \underbrace{e^{inx}}_{(e^{ix})^n}}_{\frac{1-e^{ix(2N+1)}}{1-e^{ix}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ix\frac{2N+1}{2}} - e^{ix\frac{2N+1}{2}}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \qquad \Big|\ \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

Kurvendiskussion von $\delta_N(x)$:

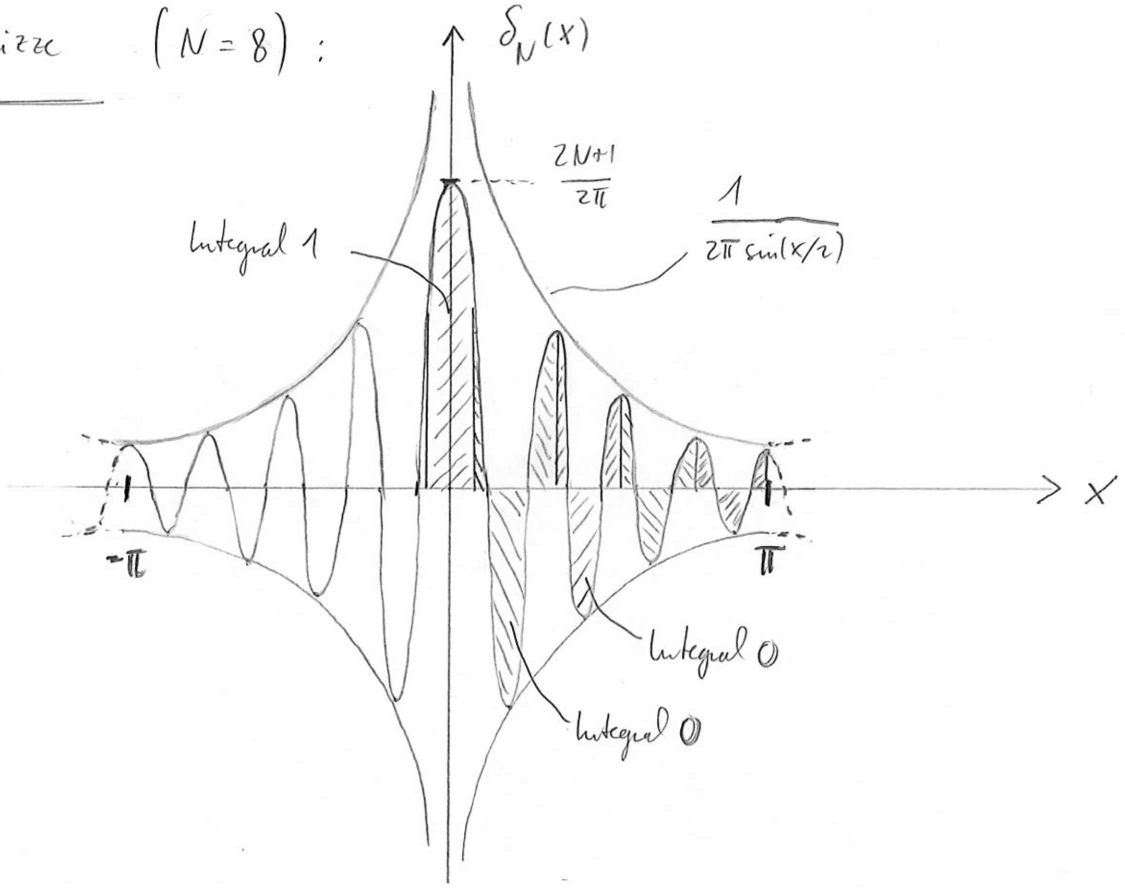
1.) $$\underline{\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \delta_N(x)} \underset{\text{Def.}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{e^{inx}}_{\underbrace{V_0^*(x)\cdot V_n(x)}_{=1}}}_{\langle V_0 | V_n\rangle = \delta_{0n}} = \underline{\underline{1}}$$

2.) $$\underline{\underline{\lim_{x\to 0} \delta_N(x)}} \underset{\text{de l'Hospital}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{\sin'\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin'\left(\frac{x}{2}\right)}}_{\frac{\frac{2N+1}{2}\cos\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}\cos(x/2)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{2N+1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{2N+1}{2\pi}}}$$

3.) $$\underline{\delta_N(x) = 0} \iff \frac{2N+1}{2}x = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \;\&\; x \in [-\pi, \pi]$$

$$\iff \underline{\underline{x = \pi \frac{2k}{2N+1}}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \qquad (2N \text{ Stück})$$

Skizze $(N=8)$:



$\Rightarrow$ anschaulich plausibel:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dy\; f(y)\, \delta_N(x-y) = f(x) \qquad \text{q.e.d.}$$