16.3 Orthonormalbasis

Def: Eine Basis $v_1, \dots, v_n$ eines HR V ($\hat{=}$ VR + Skalarprod.)

heisst Orthonormalbasis (ONB) $\Leftrightarrow$ $\langle v_j | v_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j,k \in \{1, \dots, n\}$

[Erinnerung: $n = \dim(V) \leq \infty$]

Satz: aus jeder Basis lässt sich eine ONB konstruieren.

Bew:

- $v_k \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ (sonst wäre c_k in $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$ nicht eindeutig)
- Ü 46 : wenn man v_k durch $a v_k + b v_j$ ersetzt (mit $a \neq 0$, $j \neq k$) erhält man wieder eine Basis.

- <u>(Gram-) Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren:</u>

Gegeben: bel. Basis $v_1, \dots, v_n$. Ziel: ONB. Weg:

$\tilde{u}_1 := v_1 \Rightarrow \|\tilde{u}_1\| \neq 0$, $u_1 := \tilde{u}_1 / \|\tilde{u}_1\|$

$\Rightarrow \|u_1\| = 1$, $u_1, v_2, \dots, v_n$ wieder Basis.

$\tilde{u}_2 := v_2 - \langle u_1 | v_2 \rangle u_1 \Rightarrow \langle u_1 | \tilde{u}_2 \rangle = \langle u_1 | v_2 \rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle \overbrace{\langle u_1 | u_1 \rangle}^{1} = 0$

$\Rightarrow \tilde{u}_2$ statt v_2 ergibt wieder Basis $\Rightarrow \tilde{u}_2 \neq 0$, $u_2 := \tilde{u}_2 / \|\tilde{u}_2\|$

$\Rightarrow \|u_2\| = 1$, $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$, $u_1, u_2, v_3, \dots, v_n$ wieder Basis.

u.s.w.: [vollst. Induktion]

$$\tilde{u}_k := v_k - \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j | v_k \rangle u_j}$$

$\hat{=}$ Projektion von v_k auf bereits konstruierte $u_1, \dots, u_{k-1}$

$\Rightarrow \tilde{u}_k \perp u_1, \dots, u_{k-1}$ (Details selbst)

$\Rightarrow \tilde{u}_k$ statt v_k ergibt wieder Basis $\Rightarrow \tilde{u}_k \neq 0$; $u_k := \tilde{u}_k / \|\tilde{u}_k\|$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ wieder Basis.

usw bis $k = n$ $\Rightarrow$ <u>ONB $u_1, \dots, u_n$</u> q.e.d.

<u>Beisp:</u> Ü 47 c

16.4 Komponentendarstellung

Sei V HR mit ONB $v_1, \dots, v_n$, d.h. jedes $f \in V$ (z.B. Funktionenraum) ist von der Form

$$\underline{\underline{f = \sum_{k=1}^{n} f_k v_k}} \qquad (f_k \in K)$$

$$\Rightarrow \langle v_j | f \rangle = \langle v_j | \sum_{k=1}^{n} f_k v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} f_k \underbrace{\langle v_j | v_k \rangle}_{=\delta_{jk}} = f_j \quad \forall j$$

k statt j

$$\Rightarrow \underline{\underline{f_k = \langle v_k | f \rangle}} \qquad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k | f \rangle v_k}} \qquad \forall f \in V$$

Für $f = \sum_{k=1}^{n} f_k v_k$, $g = \sum_{k=1}^{n} g_k v_k = \sum_{j=1}^{n} g_j v_j$ folgt

$$\langle f | g \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k v_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} g_j v_j \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Anti-)Linearität}}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_k^* g_j \underbrace{\langle v_k | v_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\langle f | g \rangle = \sum_{k=1}^{n} f_k^* g_k}} \quad \forall f, g \in V \quad \text{(2. Parseval-Identität)}$$

Speziell für $g = f$:

$$\underline{\underline{\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2}} \quad \forall f \in V \quad \text{(1. Parseval-Identität)}$$

16.5 Lineare Operatoren und Matrizen

Def: Sei V HR über K. Eine Abb.

$$A: V \to V$$
$$v \mapsto A(v)$$

heisst lineare Abb. oder linearer Operator, falls

$$A(u+v) = A(u) + A(v) \quad \forall u, v \in V$$

$$A(a \cdot v) = a \cdot A(v) \quad \forall v \in V, a \in K$$

Meist lässt man Klammern weg: $Av := A(v)$

Einfachstes Beisp: $I(v) := v \quad \forall v$ („Identität").

Sei $v_1, \dots, v_n$ ONB von V $\Rightarrow$ für jedes $x \in V$ gilt

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{x_k := \langle v_k | x \rangle}}$$

Betrachte $\underline{\underline{y := Ax}}$ $\Rightarrow$ $y = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$ mit $y_j = \langle v_j | Av \rangle =$

$$= \langle v_j | \underbrace{A \sum_{k=1}^{n} x_k v_k}_{\sum_{k=1}^{n} x_k A v_k} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle v_j | A v_k \rangle$$

Def: $\underline{\underline{A_{jk} := \langle v_j | A v_k \rangle}}$ $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k}}$$

Beisp: $I_{jk} = \langle v_j | \underbrace{I v_k}_{v_k} \rangle = \langle v_j | v_k \rangle = \delta_{jk}$

Defs:

$$\underset{\sim}{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\hat{=}\ n \text{ Zahlen } x_k \in K)$$

„Spaltenvektor" bzw. „Darstellung von $x \in V$ in der ONB $v_1, \dots, v_n$".

Andere Notation: $\vec{x}$ oder $\underline{x}$ oder wieder x.

Ebenso:

$$\underset{\sim}{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ferner:

„Matrix-Elemente"

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & \vdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\hat{=}\ n \times n \text{ Zahlen } A_{kj} \in K)$$

„n Kreuz n"

$(n \times n-)$ „Matrix" bzw. „Darstellung von A in der ONB $v_1, \dots, v_n$".

Bem: horizontal $\hat{=}$ „Zeilen" (1. Index), vertikal $\hat{=}$ „Spalten" (2. Index)

Andere Notation: wieder A

Beisp:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} =: \mathbb{1}$$

„Einheitsmatrix"

Def:

$$\underset{\sim}{y} = \underset{=}{A}\,\underset{\sim}{x}$$

(Matrix-Multiplikation von $\underset{=}{A}$ mit $\underset{\sim}{x}$)

ist per Def. die Abkürzung für die n Gl'en:

$$y_1 = \sum_{k=1}^{n} A_{1k} x_k$$

$$y_2 = \sum_{k=1}^{n} A_{2k} x_k \quad \Leftrightarrow \quad y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k \;,\; j = 1, \dots, n$$

$$\vdots$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} x_k$$

$\Leftrightarrow$ $y_j \mathrel{\hat{=}}$ „j-te Zeile von $\underset{=}{A}$ mal Spaltenvektor $\underset{\sim}{x}$"

Bem:

- $\underset{\sim}{x}$ enthält gesamte Info über $x \in V$

  $\Rightarrow$ es sieht alles genauso aus wie im VR $\mathbb{C}^n$ (& Skalarprod.), obwohl V ein Fkt'enraum sein kann!

- $\underline{\underline{A}}$ enthält gesamte Info über $A: V \to V$.

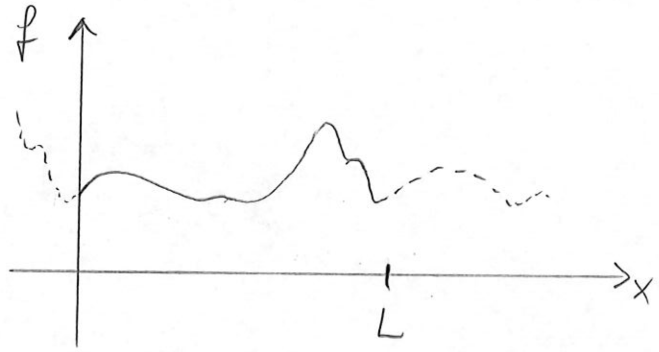
- unmittelbarer Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme ($\underset{\sim}{y}$ gegeben, $\underset{\sim}{x}$ gesucht).

Fortsetzung: LAP-Vorlesung

17 Fourierreihen

17.1 Motivation und Definition

- Kann man „beliebige" Fkt. $f : [0, L) \to \mathbb{R}$



OBdA: periodische Fortsetzung $f(x+L) = f(x)$
[andernfalls: setze f geeignet fort auf kleinem Hilfsintervall!]

als Summe von Winkelfkt'en (cos und sin) darstellen?

OBdA: $L = 2\pi$, $x \in [-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

- Wichtigstes Beisp. der allgem. Konzepte aus Kap. 16.