15.8 Laplace-Operator

$$\boxed{\Delta\phi := \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \frac{1}{h_{u_1}h_{u_2}h_{u_3}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{h_{u_1}h_{u_2}h_{u_3}}{(h_{u_k})^2}\frac{\partial}{\partial u_k}\phi\right)}$$

- wieder unabh. vom gewählten Koordinatensystem
- wieder Bem. analog zu (i) – (iii)
- Beisp: Ü 37

15.9 Rotation

Per Def. soll gelten

$$\boxed{\vec{n}_S \cdot \operatorname{rot} \vec{f} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})}$$

unabh. vom gewählten Koordinatensystem (vgl. Kap. 14.9, S. 14.72)

Daraus folgt (Lang & Pucker, Kap. 8.2 ; Grossmann Kap. 8.2.1)

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{f} := \operatorname{rot} \vec{f} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_k}}{h_{u_{k+1}} h_{u_{k+2}}} \left[\frac{\partial}{\partial u_{k+1}} \left(f_{u_{k+2}} h_{u_{k+2}} \right) - \frac{\partial}{\partial u_{k+2}} \left(f_{u_{k+1}} h_{u_{k+1}} \right) \right]}$$

[hat eigentlich nichts mehr mit Kreuzprodukt zu tun]

$u_4 := u_1$, $u_5 := u_2$

Bem. (i)-(iii) analog.

Beisp: Ü 37

15.10 Fazit

Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ für sich nur in Kartesischen Koord. sinnvoller (einheitlicher) „Vektor", und nur dann gegeben als $\vec{e}_{u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}$, ansonsten nicht, vgl. Ü 39.

Plausibel, detaillierter Beweis jedoch umständlich und daher weggelassen:

Dank der Koordinaten-unabh. Def. von grad, div, Δ, rot folgt:

- „Rechenregeln" für grad, div, Δ, rot (z.B. Ü 9, Ü 27, Ü 29) immer richtig (unabh. von Wahl des Koordinatensystems).
- ebenso Integralsätze (und Folgerungen daraus, z.B. Ü 38):

15.11 Integralsätze

Vgl. Kap. 14.8 & 9.

Satz von Gauß

Sei $\vec{f} : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bar und $V \subset D$ ein „Volumen"

mit stückweise glatten, „nach aussen" orientierten Rand ∂V.

Dann gilt

$$\underline{\underline{\int_V dV \underbrace{\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})}_{=: \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})} = \iint_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{:= dA\, \vec{n}(\vec{r})} \cdot \vec{f}(\vec{r})}}$$

unabh. von der Wahl des Koordinatensystems, d.h. für jede

Parametrisierung von V, dV, ∂V, $d\vec{A}$, $\vec{r}(\vec{u})$, $\vec{f}(\vec{u}) := \vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$.

Satz von Stokes

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bar und das „Flächenstück" $S \subset D$ sowie dessen Rand ∂S stückweise glatt und orientiert gemäss „Rechte-Hand-Regel".

Dann gilt

$$\iint_S \underbrace{d\vec{A}}_{:= dA\,\vec{n}(\vec{r})} \cdot \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{f}(\vec{r})}_{=: \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})} = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

usw (wie Gauß).

<u>Nachfolgende Tabelle:</u>

Zusammenstellung von Linienelement, grad, div, rot, Δ

in Kartesischen Koordinaten (mit $\vec{e}_{x,y,z}$ statt $\vec{e}_{1,2,3}$ und

U statt ϕ, $\vec{V}$ statt $\vec{f}$)

sowie in Zylinder- und Kugelkoord.

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$d\vec{s} = d\vec{r}$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{x}} dx + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{y}} dy + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} dz$	$\vec{\mathbf{e}_\rho} d\rho + \vec{\mathbf{e}_\varphi} \rho d\varphi + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} dz$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{r}} dr + \vec{\mathbf{e}_\vartheta} r d\vartheta + \vec{\mathbf{e}_\varphi} r \sin\vartheta d\varphi$
grad$U$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{x}} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{y}} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{\mathbf{e}_\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \vec{\mathbf{e}_\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} \frac{\partial U}{\partial z}$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{r}} \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{\mathbf{e}_\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \vec{\mathbf{e}_\varphi} \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$
div$\vec{V}$	$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\vartheta \sin\vartheta)$ $+ \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$
rot$\vec{V}$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{x}} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$ $+ \vec{\mathbf{e}_\mathbf{y}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)$ $+ \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$	$\vec{\mathbf{e}_\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right)$ $+ \vec{\mathbf{e}_\varphi} \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right)$ $+ \vec{\mathbf{e}_\mathbf{z}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right)$	$\vec{\mathbf{e}_\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (V_\varphi \sin\vartheta) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right]$ $+ \vec{\mathbf{e}_\vartheta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right]$ $+ \vec{\mathbf{e}_\varphi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\vartheta) - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right]$
ΔU	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$ $+ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$ $+ \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right)$ $+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

16. Vektor-, Funktionen- und Hilberträume

[Lang & Pucher, Kap. 12, Vorkurs Kap. 4]

16.1 Vektorraum

Def.: Ein Vektorraum (VR) oder linearer Raum ist ein

Quadrupel $(V, +, K, \cdot)$, bestehend aus:

(i) einer Menge V (mit Elementen – genannt Vektoren – $u, v, w, \ldots$)

(ii) einer Abbildung (genannt (Vektor-) Addition)

$$+ : V \times V \to V$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

(iii) einem Körper K (in der Physik nur $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ relevant)

(iv) einer Abbildung (genannt skalare oder äussere Multiplikation)

$$\cdot : K \times V \to V$$
$$(a, v) \to av = a \cdot v$$ (mit oder ohne Punkt egal, kein Skalarprodukt!)

mit den folgenden Eigenschaften (sog. VR-Axiome):

(1) $u+v = v+u \quad \forall\, u,v \in V$ (<u>Kommutativgesetz</u>)

(2) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall\, u,v,w$ (<u>Assoziativgesetz</u>)

(3) es gibt einen sog. „<u>Nullvektor</u>" $0 \in V$ mit $v+0 = v \quad \forall\, v \in V$

(4) zu jedem $v \in V$ existiert ein sog. „<u>inverser Vektor</u>" in V, den wir mit $-v$ bezeichnen, so dass $\underbrace{v+(-v)}_{\text{Abk.: } -v} = 0 \quad \forall\, v \in V$

(5) $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v \quad \forall\, v \in V,\ a,b \in K$ (<u>Assoziativgesetz</u>)

(6) $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$ ($\underline{1 \in K}$)

(7) $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v \quad \forall\, u,v \in V,\ a \in K$

(8) $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad \forall\, v \in V,\ a,b \in K$

$\Big\}$ (<u>Distributivgesetze</u>)

Bem: • Andere Schreibweisen: $\vec{v}, \underline{v}, \mathbf{v}, |v\rangle$

• Abkürzungen: VR „V über K" (+, · „klar")

oder „VR V" (+, ·, K „klar")

Beispiele:

1.) $V = \mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$, $K = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ bel. aber fest

sog. Euklid'scher (Vektor-)Raum mit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{=u} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{=v} := \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}}_{= u+v \in \mathbb{R}^n}$$

(„komponentenweise")

$$a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{=v} := \underbrace{\begin{pmatrix} a v_1 \\ \vdots \\ a v_n \end{pmatrix}}_{= a \cdot v \in \mathbb{R}^n}$$

— || —

$\Rightarrow$ VR-Axiome (1)–(8) sind in der Tat erfüllt. Bew: Ü 44

Bem: • alle „vertrauten Rechenregeln" im VR $\mathbb{R}^n$ folgen aus den Axiomen (1)–(8) und gelten somit für jeden VR.

• aber nur in diesem Beisp. ist räumliche/geometrische Veranschaulichung mittels „Pfeilen" oder „Punkten" möglich! (eigentlich sogar nur für $n = 1, 2, 3$)

1'.) Analog: $\underline{\underline{V = \mathbb{C}^n}}$, $\underline{\underline{K = \mathbb{C}}}$

(aber jetzt keine „Veranschaulichung mehr (ausser für $n=1$))

2.) $\underline{\underline{P^n(a,b)}}$: Raum aller Funktionen

$$f : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, x^k$$

mit $c_k \in \mathbb{C} \; \forall k = 0, \dots, n-1$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ bel. aber fest

($\hat{=}$ Polynome $n-1$-ten Grades falls $c_{n-1} \neq 0$).

Mit den Defs. :

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) := c\, f(x) \qquad \forall c \in \underline{\underline{K := \mathbb{C}}}$$

sind VR-Axiome (1)-(8) erfüllt. Bew: Ü 45.

D.h. $P^n(a,b)$ ist ein VR über $\mathbb{C}$.

Jedes Element (Vektor) dieser VR ist jetzt aber eine Fkt.!

$\Rightarrow$ $P^n(a,b)$ ist ein sog. <u>Funktionenraum!</u>

<u>Bem:</u> statt $K=\mathbb{C}$ hätte man auch $K=\mathbb{R}$ wählen können,

und optional dann auch $c_k \in \mathbb{R}$ statt $c_k \in \mathbb{C}$

($\Leftrightarrow f:[a,b] \to \mathbb{R}$)