15.7 Divergenz

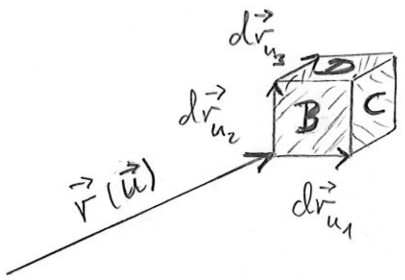
Per Def. soll gelten

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{f} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{r})}$$ („Quellendichte")

unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

(vgl. Kap. 14.8, S. 14.64)

Speziell für kleinen Quader



Strom durch B $\underbrace{\text{aus dem Quader heraus}}$:

$$S_B = -f_{u_3} \cdot B$$

↳ Komponente von $\vec{f}$ in Richtung $\vec{e}_{u_3}$ bzw. $d\vec{r}_{u_3}$

Erinnerung: $d\vec{r}_{u_k} = \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$

$$B = |d\vec{r}_{u_1}|\,|d\vec{r}_{u_2}| = h_{u_1} h_{u_2}\, du_1\, du_2$$

Mit $g := f_{u_3} h_{u_1} h_{u_2}$ (ohne Argumente $\vec{u}$)

folgt

$$S_B = -g(\vec{u})\, du_1\, du_2 \quad (\text{jetzt mit Arg. } \vec{u})$$

Analog: Strom durch Fläche B' „gegenüber von B" $\Rightarrow$ $\vec{u} \to \vec{u} + \vec{e}_{u_3} du_3$

$$S_{B'} = +\underbrace{g(\vec{u} + \underbrace{\vec{e}_{u_3} du_3}_{})}_{= g\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 + du_3 \end{pmatrix}} du_1\, du_2$$

$$= g(\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial u_3} g(\vec{u})\, du_3 \quad (\text{exakt für } du_3 \to 0)$$

15.20^{u}

$$\Rightarrow S_B + S_{B'} = \underbrace{-g\,du_1\,du_2 + \big(g}_{\text{hebt sich weg}} + \frac{\partial}{\partial u_3}\underbrace{g}_{= f_{u_3} h_{u_1} h_{u_2}}\,du_3\big)\,du_1\,du_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_3}\Big(f_{u_3}\,\underbrace{h_{u_1} h_{u_2}}_{= \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_3}}}\Big)\,du_1\,du_2\,du_3$$

Genauso für Quaderseiten C und C':

$$S_C + S_{C'} = \frac{\partial}{\partial u_1}\left(f_{u_1}\,\frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_1}}\right) du_1\,du_2\,du_3$$

Genauso für D und D' ...

$\Rightarrow$ Gesamtstrom durch Quaderoberfl. ∂V:

$$\iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \simeq \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right) du_1 \, du_2 \, du_3$$

exakt für $du_k \to 0$

Volumen des Quaders $V \simeq |d\vec{r}_{u_1}| \, |d\vec{r}_{u_2}| \, |d\vec{r}_{u_3}| = h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \, du_1 \, du_2 \, du_3 \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{f} := \operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right)}$$

[hat eigentlich nichts mehr mit Skalarprod. zu tun]

<u>Bem:</u>

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ so definiert

(ii) im Allg. $\neq \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k} f_{u_k}$

(iii) Argumente $\vec{u}$ bzw. $\vec{r}$ weggelassen.

Beisp: Ü 37 (Kugelkoord)