Ergänzung zu Kap. 15.3:

15.3' Polarkoordinaten

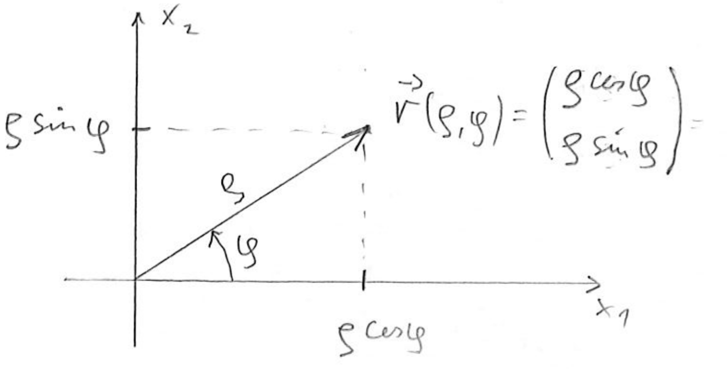
Wie Zylinderkoord., aber jetzt $z = 0$ fest, d.h. nur noch

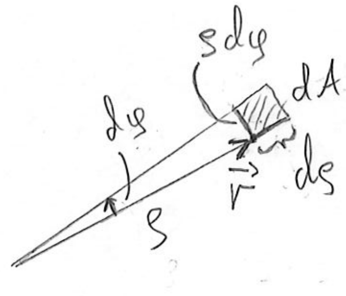
x_1-x_2-Ebene bzw. $\mathbb{R}^2$ betrachtet:

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{u}) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (\rho, \varphi)$

$\rho \in \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$





Anschaulich: $\quad dA = \rho\, \underbrace{d\varphi\, d\rho}_{du_1 du_2 = d^2u}$

Formal: $\quad \uparrow$

$h_\rho h_\varphi = h_{u_1} h_{u_2} = J(\vec{u})$

$\uparrow$

entspricht jetzt „Volumen" im $\mathbb{R}^2$ (daher kein $d\vec{A}$).

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{B}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Integrationsbereich } \subset \mathbb{R}^2}} d^2\underbrace{x}_{(x_1, x_2)} \, f(\vec{x}) = \underbrace{\int_{\tilde{B}}}_{\substack{\uparrow \\ \tilde{B} := \{\vec{u}(\vec{r}) \,|\, \vec{r} \in B\} \;\Leftrightarrow\; B = \{\vec{r}(\vec{u}) \,|\, \vec{u} \in \tilde{B}\}}} d^2u \, J(\vec{u}) \, f(\vec{r}(\vec{u}))$$

- $J(\vec{u}) := h_{u_1} h_{u_2} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|$

- Vergl. mit Substitution/Variablentrafo in 1d (Kap. 11.2, S. 11.19)

$$\int_a^b dx \, f(x) = \int_\alpha^\beta dy \, g'(y) \, f(g(y))$$

$$g(\alpha) = a \,, \quad g(\beta) = b \quad \Leftrightarrow \quad B := [a, b] = \{ g(y) \,|\, y \in \underbrace{[\alpha, \beta]}_{\tilde{B}} \}$$

<u>Beisp:</u> $f(\vec{x}) = e^{-a(x_1^2+x_2^2)}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+)$

$$\Rightarrow f(\vec{r}(\vec{u})) = e^{-a\underbrace{\left((r_1(\vec{u}))^2+(r_2(\vec{u}))^2\right)}_{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2}} = e^{-a\rho^2}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \rho \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi \in [0,2\pi) \Leftrightarrow \tilde{B} = \mathbb{R}_0^+ \times [0,2\pi)$$

$$\int_B d^2x\, f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\ e^{-a(x_1^2+x_2^2)}$$ direkte Auswertung schwierig!

$$= \int_{\tilde{B}} d^2u\, J(\vec{u})\, f(\vec{r}(\vec{u})) = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\ \rho\ e^{-a\rho^2}$$

$$= \int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-a\rho^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1}_{\varphi\big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0} = 2\pi \underbrace{\int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-a\rho^2}}_{-\frac{1}{2a}e^{-a\rho^2}\big|_0^\infty = -\frac{1}{2a}(0-1)} = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\, e^{-ax_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\, e^{-ax_2^2}}_{=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2}\right)^2} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

Zurück zu Kap. 15.5:

<u>Beisp:</u> $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$ in Zylinderkoord.:

$$f_{u_1} = r_\varrho = \vec{r}\cdot\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho$$

Kap. 15.4

$$f_{u_2} = r_\varphi = \vec{r}\cdot\vec{e}_\varphi = \left(-\text{''}- \right)\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_{u_3} = r_z = \vec{r}\cdot\vec{e}_z = \left(-\text{''} \right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{r} = \vec{e}_\varrho\cdot\varrho + \vec{e}_z\cdot z}}$$

Betrachte jetzt $\vec{r} = \vec{r}(t)$ als „Teilchenbahn" $\Rightarrow$

Argumente t weggelassen

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\varrho\cdot\varrho + \vec{e}_z\cdot z\right) = \dot{\vec{e}}_\varrho\,\varrho + \vec{e}_\varrho\,\dot{\varrho} + \dot{\vec{e}}_z\cdot z + \vec{e}_z\cdot\dot{z}$$

$$\dot{\vec{e}}_\varrho = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \\ \cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_\varrho\,\dot{\varrho} + \vec{e}_\varphi\,\dot{\varphi}\,\varrho + \vec{e}_z\,\dot{z}}}$$

15.6 Gradient

Per Def. soll gelten:

$$\boxed{d\phi = \text{grad}\,\phi \cdot d\vec{r}}$$ („infinit. Feldänderung bei Ortsänderung $d\vec{r}$"

unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

(„totales Differential", vgl. Kap. 14.5, S. 14.44).

Speziell für $d\vec{r}_{u_k} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k = \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$ (vgl. Kap. 15.2, keine Summation!)

$$\Rightarrow d\phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur } u_k \text{ ändert sich}}}{=} \frac{\partial \phi}{\partial u_k} du_k \overset{\substack{\text{Def. oben} \\ \downarrow}}{=} \text{grad}\,\phi \cdot d\vec{r}_{u_k} = \underbrace{\text{grad}\,\phi \cdot \vec{e}_{u_k}}_{= (\text{grad}\,\phi)_{u_k}} h_{u_k} du_k$$

(Kap. 15.4: $\vec{F}_{u_k} = \vec{F} \cdot \vec{e}_{u_k}$)

$du_k \neq 0$, k beliebig (keine Summation) $\Rightarrow$

$$(\text{grad}\,\phi)_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \frac{\partial \phi}{\partial u_k} \quad \forall k.$$ Mit Kap. 15.4: $\vec{F} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} \cdot F_{u_k}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla}\phi := \text{grad}\,\phi = \sum_{k=1}^{3} \frac{\vec{e}_{u_k}}{h_{u_k}} \frac{\partial \phi}{\partial u_k}}$$

Bem:

(i) $\vec{\nabla}\phi$ so definiert.

(ii) im Allg. $\neq \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} \frac{\partial \phi}{\partial u_k}$!

(iii) Argumente $\vec{u}$ bzw. $\vec{r}$ weggelassen.

Beisp: in Zylinderkoord.

$$\vec{\nabla}\phi(\rho,\varphi,z) = \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi(\rho,\varphi,z)$$

Kugelkoord. → Ü 37

15.7 Divergenz

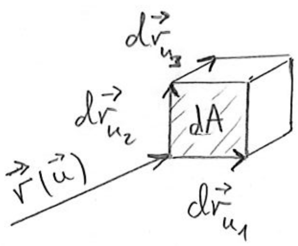
Per Def. soll gelten

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{f} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r})}$$ („Quellendichte")

unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

(vgl. Kap. 14.8, S. 14.64)

Speziell für kleinen Quader



Strom durch dA: $f_3(\vec{u})\, dA =$

$$|d\vec{A}| \overset{\text{Kap. 15.2}}{=} h_{u_1}(\vec{u})\, h_{u_2}(\vec{u})\, du_1\, du_2$$

$$= g(\vec{u})\, du_1\, du_2 \;, \quad g := f_{u_3} h_{u_2} h_{u_3}$$

Strom durch „Hinterfläche (gegenüber dA)":

$$\underbrace{-\,g(\vec{u} - \vec{e}_{u_3} du_3)}_{\simeq\, -g(\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial u_3} g(\vec{u})\, du_3}\, du_1\, du_2$$

(exakt für $du_3 \to 0$)

Genauso für 4 übrigen Flächen $\Rightarrow$ Netto-Fluss durch Quader

$$\iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \approx \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right) du_1 \, du_2 \, du_3$$

exakt für $du_k \to 0$

Quader-Volumen (Kap. 15.2): $dV \approx h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \, du_1 \, du_2 \, du_3$ $\overset{V \hat{=} dV}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{f} := \operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(f_{u_k} \frac{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_k}} \right)}$$

[hat eigentlich nichts mehr mit Skalarprod. zu tun]

<u>Bem:</u>

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ so definiert

(ii) im Allg. $\neq \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_k} f_{u_k}$

(iii) Argumente $\vec{u}$ bzw. $\vec{r}$ weggelassen.

Beisp: Ü 37 (Kugelkoord)