Orthogonale Koordinaten $\Leftrightarrow$ $\vec{e}_{u_j} \cdot \vec{e}_{u_k} = \delta_{jk}$ .

Ab jetzt vorausgesetzt.

Ferner OBdA : $\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2} = \vec{e}_{u_3}$ (rechtshändige Basis).

Bem: „lokales Dreibein" $\vec{e}_{u_1}, \vec{e}_{u_2}, \vec{e}_{u_3}$ ist von $\vec{u}$ bzw $\vec{r}$

abhängig („dreht sich mit $\vec{r}$ mit").

## Beisp: Zylinderkoord.

$u_1 = \rho \quad , \quad u_2 = \varphi \quad , \quad u_3 = z$

$$\vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_{u_1} = h_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{e}_{u_1} = \vec{e}_\rho}} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}} \qquad [\parallel \vec{r}\ !]$$

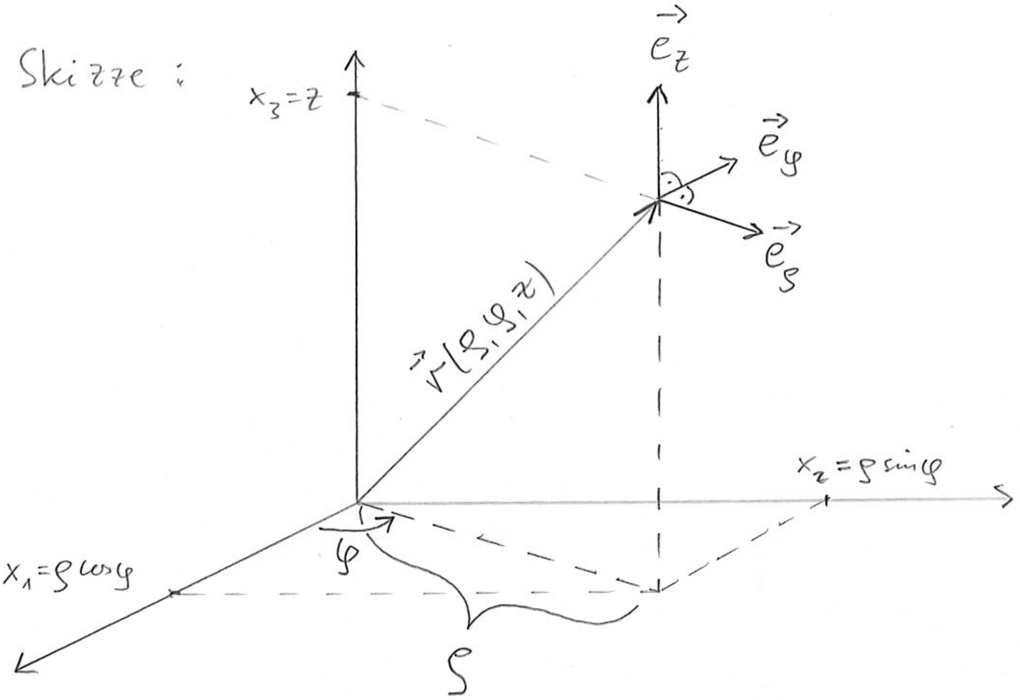
analog: $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_\varphi = \rho \, , \quad \underline{\underline{\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_z = 1 \, , \quad \underline{\underline{\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ Orthogonal (Details selbst) ✓

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \vec{e}_z \quad ✓$$

Skizze:




[ nochmals: • Alles hängt von $\vec{u} = (\rho, \varphi, z)$ ab bzw dreht sich mit $\vec{r}$ mit

• Argumente $\vec{u}$ weggelassen ]

## 15.2 Bogen-, Flächen- und Volumenelement

Wenn sich die k-te Komponente von $\vec{u}$ (d.h. $u_k$) um $du_k$ ändert, dann ändert sich $\vec{r} = \vec{r}(\vec{u})$ um

$$\underline{\underline{d\vec{r}_{u_k} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k = \vec{e}_{u_k} \, h_{u_k} \, du_k}}$$

(<u>keine</u> Summation über k!)

$\hat{=}$ „Differential in Richtung der $u_k$-Koordinatenlinie"

(im Allg. $\neq \vec{e}_{u_k} \, du_k$ !).

Name: <u>Bogenelement</u>

Folgerungen:

1.) Flächenelement einer sog. „Koordinatenhyperfläche"

mit $u_3 = \text{const}$:

$$\underline{\underline{\vec{dA} := d\vec{r}_{u_1} \times d\vec{r}_{u_2} = \overbrace{\left(\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2}\right)}^{=\vec{e}_{u_3}} h_{u_1} h_{u_2} du_1 du_2}}$$

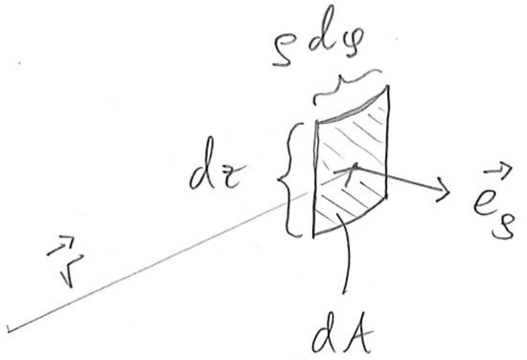
und analog für $u_1 = \text{const.}$ bzw. $u_2 = \text{const.}$

[Argumente $\vec{u}$ weggelassen!]

Beisp: Flächenelement auf Zylindermantel $\hat{=}$

Koordinatenfläche für Zylinderkoord mit $\rho = \text{const}$:

$$\vec{dA} = \vec{e}_\rho \, \rho \, d\varphi \, dz$$



## 2.) Volumenelement

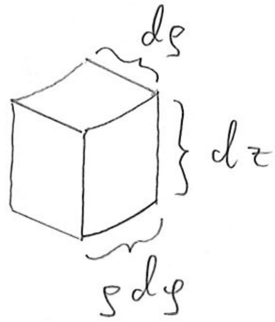
$$dV := \left(d\vec{r}_{u_1} \times d\vec{r}_{u_2}\right) \cdot d\vec{r}_{u_3} = \underbrace{\underbrace{\left(\vec{e}_{u_1} \times \vec{e}_{u_2}\right)}_{=\vec{e}_{u_3}} \cdot \vec{e}_{u_3}}_{=1} h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \, du_1 du_2 du_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dV = h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \, du_1 \, du_2 \, du_3}}$$

[Arg. $\vec{u}$ weggelassen]

Beisp: Zylinderkoord.

$$dV = \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz$$



## 3.) Linienelement

$$d\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \cdot du_k}_{k=1,2,3} = \sum_{k=1}^{3} d\vec{r}_{u_k} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} h_{u_k} du_k$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{ds := |d\vec{r}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (h_{u_k} du_k)^2}}} \quad \text{(differentielle Bogenlänge)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (\underbrace{h_{u_k}}_{h_{u_k}(\vec{u}(t))} \underbrace{\dot{u}_k}_{\dot{u}_k(t)})^2}}}$$

Dasselbe für Kugelkoord → Übungen.

# 15.3 Variablentransformation für mehrdim. Integrale

Erinnerung (Kap. 13.4, insbes. S. 13.25):

Volumenintegral $\hat{=}$ Summe über Beiträge der Form $f(\vec{x}_k)\,\Delta V_k$

$$\xrightarrow{\Delta V_k \to 0} \int_B dV\, f(\vec{x}) = \int_B d^3x\, f(\vec{x}) = \iiint_B dx_1\, dx_2\, dx_3\, f(\vec{x})$$

$B$ ↑ Integrationsbereich

Ziel: Trafo auf „neue Variablen" $\vec{u}$.

- $\tilde{B} := \{ \vec{u}(\vec{r}) \mid \vec{r} \in B \}$ [transf. / neuer Integrationsbereich]

- $$f(\vec{x}_k)\, \underbrace{\Delta V_k}_{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} = f(\vec{r}(\vec{u}_k))\, h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3} \underbrace{\Delta u_1\, \Delta u_2\, \Delta u_3}_{\Delta U_k}$$

- $\underline{J := h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}$ sog. „Jacobi-Determinante"

(Argumente $\vec{u}$ weggelassen)

$\Rightarrow$ $\iiint\limits_{\tilde{B}} du_1\, du_2\, du_3 \;\; J(\vec{u}) \; f(\vec{r}(\vec{u}))$ muss selbes Volumenint. ergeben!

$\Leftrightarrow$ Variablentransf. für 3-dim Integrale von Kartesischen

auf bel. krummlinige Koordinaten:

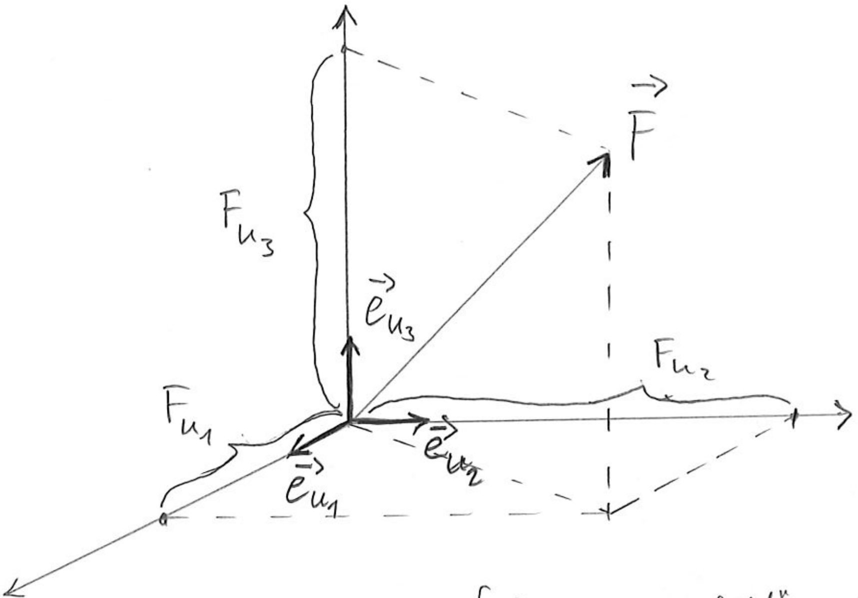
$$\boxed{\int\limits_{B} d^3x \;\; f(\vec{x}) = \int\limits_{\tilde{B}} d^3u \;\; J(\vec{u}) \; f(\vec{r}(\vec{u}))}$$

Analog für

- n-dim. Integrale
- Vektorfelder $\vec{f}(\vec{x})$

## 15.4 Bestimmung von Vektorkomponenten

Darstellung von $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ mittels Orthogonalbasis $\vec{e}_{u_k}$, $k=1,2,3$:




[im Allg. „verdreht" zu Kart. Koord.!]

$$\underline{\underline{\vec{F}}} = \vec{e}_{u_1} F_{u_1} + \vec{e}_{u_2} F_{u_2} + \vec{e}_{u_3} F_{u_3} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} F_{u_k}}}$$

$$\underline{\underline{F_{u_k} := \vec{F} \cdot \vec{e}_{u_k} = \frac{1}{h_{u_k}} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k}}}$$

(<u>keine</u> Summation!)

[hängt alles von $\vec{u}$ ab, bzw. vom „Anfangspkt." $\vec{r}(\vec{u})$ des Vektors $\vec{F}$!]

## 15.5 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ äquivalent zu $\phi(\vec{u}) := \phi(\vec{r}(\vec{u}))$

[selbes Symbol $\phi$ „unsauber" aber „prakt."]

Dabei werden Argumente $\vec{r}$ bzw $\vec{u}$ oft weggelassen.

Analog: Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r})$ äquivalent zu $\vec{f}(\vec{u}) := \vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$

Dabei wählt man stillschweigend Basis $\vec{e}_{u_k}$ immer am jeweiligen Ort $\vec{r}$ bzw. $\vec{u}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_k}}} \overset{\text{Kap. 15.4}}{=} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_{u_k} f_{u_k}\right) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \vec{e}_{u_k}}{\partial u_k} \cdot f_{u_k} + \vec{e}_{u_k} \frac{\partial f_{u_k}}{\partial u_k}\right)}}$$

[ im Allg. $\neq \vec{0}$ ! ]