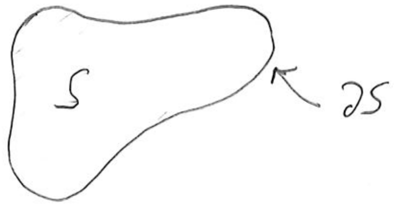
Jetzt: bel. Fläche S mit Rand(-linie) ∂S



Orientierung gem. „Rechte-Hand-Regel"

per Def. „nach aussen"

Zerlege S in viele kleine Quadrate an den Orten $\vec{x}_k$ [einzeichnen]

[nur Orientierungen $\vec{n} = \pm \vec{e}_{1,2,3}$; das geht und wird exakt für $\Delta \to 0$]

$$\Rightarrow \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \simeq \oint_{\underset{k}{\oplus} C^{(k)}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \sum_k \int_{C^{(k)}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \sum_k \Delta \vec{A}_k \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}_k))$$

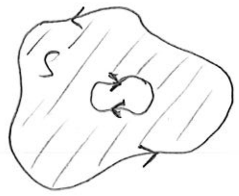
Beiträge zu gemeinsamen („inneren") Grenzlinien heben sich weg, nur „echte Aussengrenzen" relevant

$$\simeq \iint_S d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}))$$

vgl. Kap. 14.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 14.39)

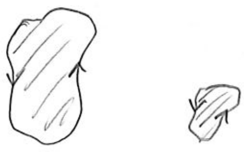
Bem:

S kann sogar „Löcher" haben



(Orientierung!)

oder aus mehreren „Fragmenten" bestehen



$\Rightarrow$ ∂S besteht im Allg. aus mehreren geschl. Wegen,

daher Symbol $\int_{\partial S} \ldots$ statt $\oint_{\partial S} \ldots$

Alles zusammen:

$$\boxed{\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \iint_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})\right) = \iint_S dA \; \vec{n}(\vec{r}) \, \mathrm{rot} \, \vec{f}(\vec{r})}$$

<u>Integralsatz von Stokes</u>

Bem:

- Gilt für bel. $\vec{f}(\vec{x})$ (Interpretation als Kraftfeld irrelevant) und bel. Flächen S (sogar mit „Löchern" oder „Fragmenten"). Einzige Voraussetzung: $\vec{f}(\vec{x})$ stetig diff'bar & S sowie ∂S stückweise glatt und gem. „Rechte-Hand-Regel" orientiert.

- $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x}$ impliziert $\int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0 \quad \forall S$.

Damit „Def. & Satz 2" aus Kap. 14.7 vollst. bewiesen

- Falls S selbst sehr klein $\Rightarrow$

$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ „innerhalb S" praktisch konstant $\Rightarrow$

$$\iint_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r})\right) \xrightarrow[\text{für } S \to 0]{} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})}_{\text{bel. Pkt. in } S} \iint_S d\vec{A} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})\right) \cdot \vec{S}$$

Mit $\vec{n}_S := \frac{\vec{S}}{\underbrace{|\vec{S}|}_{=:S}}$ folgt

$$\vec{n}_S \cdot \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ „Anschauliche Bedeutung der Rotation":

Wegintegral (z.B. Arbeit) entlang Rand eines infinitesimalen Flächenelements pro Flächeninhalt $\hat{=}$ Rotationkomponente senkrecht zur Fläche.

- Wenn man $\vec{f}(\vec{x}) =: \vec{v}(\vec{x})$ als „Strömungsfeld" interpretiert, dann impliziert $\vec{\nabla} \times \vec{f} \neq \vec{0}$ die Existenz von „Wirbeln", und umgekehrt.

Kurz: Rotation ist Mass für „lokale Wirbelstärke"

Noch kürzer: $\vec{\nabla} \times \vec{f} \;\hat{=}$ „Wirbel von $\vec{f}$"

daher $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow$ „$\vec{f}$ wirbelfrei" (vgl. S. 14.53)

($\Leftrightarrow \vec{f}$ „Gradientenfeld"; andernfalls: $\vec{f}$ „Wirbelfeld").

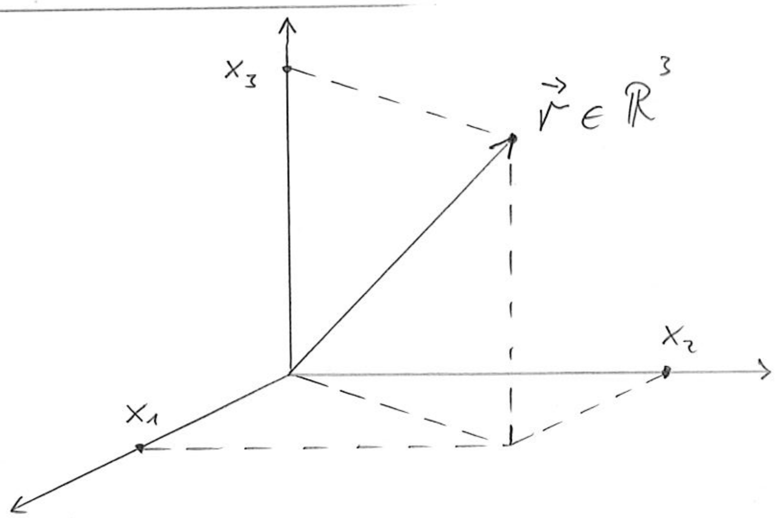
15 Krummlinige Koordinatensysteme

[Lang & Pucker, Kap. 8]

Ein bel. Pkt. $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich mittels verschiedener Koordinatensysteme „darstellen".

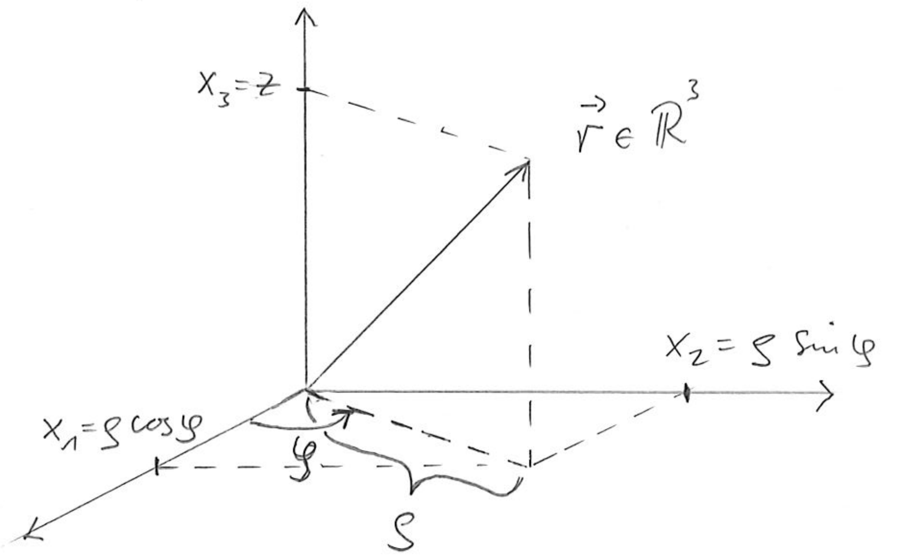
Wichtigste Beisp.:

1. Kartesische Koordinaten



$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\vec{e}_k \cdot x_k}_{k=1,2,3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad x_k \in \mathbb{R}$$

2. Zylinderkoordinaten

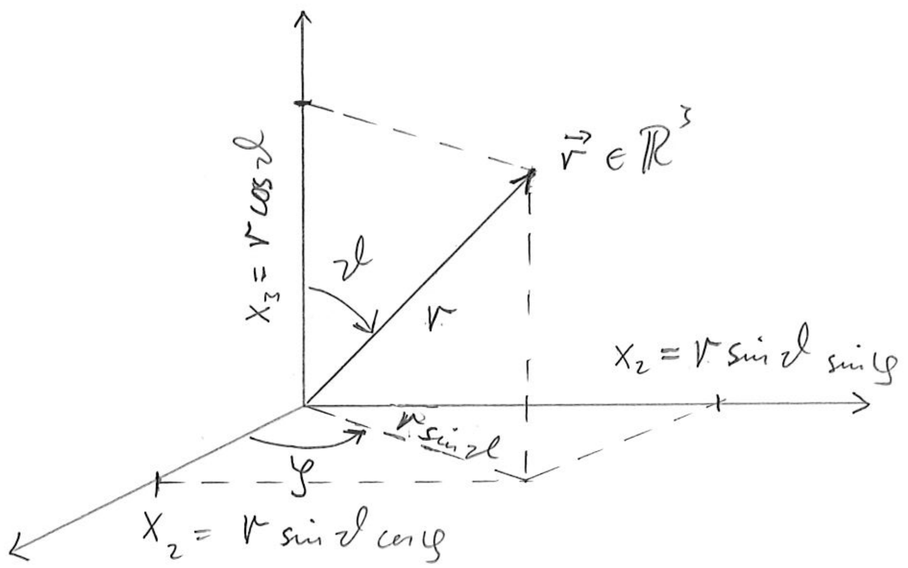


$$\vec{r} = \vec{r}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rho \in [0, \infty) \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

3. Kugelkoordinaten

(vgl. Kap. 14.3, S. 14.31)



$$\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$r \in [0, \infty)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Bem : $r = |\vec{r}|$

15.1 Allgemeine Koordinatensysteme $\hat{=}$ ein-eindeutige

Parametrisierung $\vec{r} = \vec{r}(\vec{u}) = \underbrace{\vec{e}_k \cdot x_k}_{k=1,2,3}(u_1, u_2, u_3)$,

d.h. Umkehrfkt. $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ bzw. $u_k = u_k(x_1, x_2, x_3)$

existiert ($x_k \hat{=}$ „Kartesische Komponenten").

Falls man nur ein u_k in $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ variiert,

erhält man einen Weg (sog. <u>Koordinatenlinie</u>)

mit <u>Tangentenvektor</u> (vgl. Kap. 14.1, S. 14.8)

$$\vec{e}_{u_k} := \frac{1}{h_{u_k}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \qquad (k = 1,2,3)$$

mit $h_{u_k} := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \right|$ („metrische Koeffizienten")

Bem:

- Argumente $\vec{u}$ weggelassen
- Koordinatenlinien im Allg. „krumm".
- Variation verschiedener u_K ergeben verschiedene „Scharen" von Koordinatenlinien
  $\Rightarrow$ sog. „Koordinatennetze".

Skizzen für Kartesische, Zylinder-, Kugelkoord.: selbst!