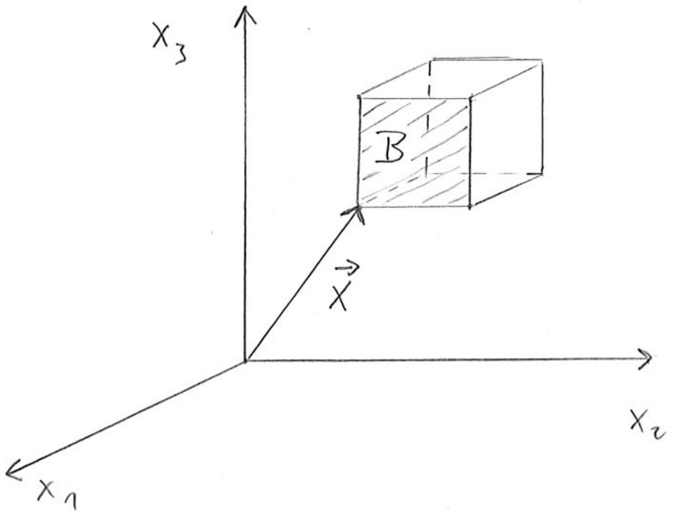
14.8 Satz von Gauß

[Lang & Pucker Kap. 7.5 & 9.1, Weltner Kap. 18]

Betrachte Strömung einer Flüssigkeit mit Dichte $\rho(\vec{x})$ und Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ durch einen Würfel:



Ort $\vec{x}$

Kantenlänge Δ

Volumen $\Delta V = \Delta^3$

Frage: Fluss / Strom (Masse pro Zeit) durch „Vorderfläche B" „aus dem Würfel heraus" ($\Leftrightarrow$ Orientierung der Fläche B)?

Vgl. Kap. 14.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 14.37).

Bem: Strom < 0 $\Leftrightarrow$ „in den Würfel hinein"

Antw.: Transfer durch $\mathbb{B}$ in Zeit Δt =

$=$ Fläche von $\mathbb{B}$ $\cdot$ Transportstrecke $\perp$ $\mathbb{B}$ (d.h. $\parallel x_1$)

$= \quad \Delta^2 \quad \cdot \quad v_1(\vec{x})\, \Delta t \quad$ ($\hat{=}$ Volumen)

$\Rightarrow$ Masse pro Zeit $=$ Dichte $\cdot$ Volumen / Zeit

$$= \rho(\vec{x}) \cdot \Delta^2 \cdot v_1(\vec{x})$$

$$= f_1(\vec{x})\, \Delta^2$$

mit $\vec{f}(\vec{x}) := \rho(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})$ (sog. Massenstromdichte).

Genauso: Strom durch „Hinterfläche" (gegenüber B)

„aus dem Würfel heraus" =

$$= -f_1(\vec{x}-\vec{e}_1\cdot\Delta)\ \Delta^2$$

(positiv $\Leftrightarrow$ Abfluss aus Würfel; negativ $\Leftrightarrow$ Zufluss)

$\Rightarrow$ Netto-Durchfluss (= Abfluss - Zufluss) durch 2 Flächen $\perp \vec{e}_1$ =

$$= \Big(f_1(\vec{x}) - \underbrace{f_1(\vec{x}-\vec{e}_1\Delta)}_{\simeq f_1(\vec{x}) - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}\cdot\Delta}\Big)\,\Delta^2 \simeq \Delta^3\,\frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1}$$

exakt für $\Delta \to 0$

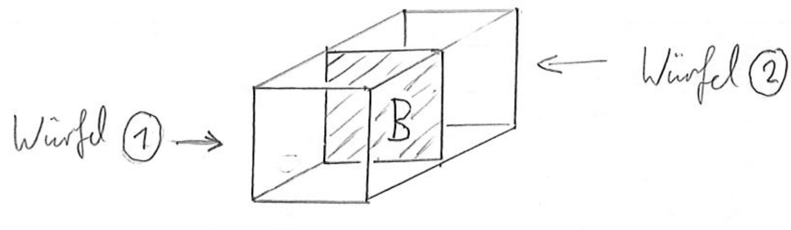
Genauso: „durch Flächen $\perp \vec{e}_2$ bzw $\vec{e}_3$".

$\Rightarrow$ Netto-Durchfluss (= Abfluss - Zufluss) durch Würfeloberfl. (alle 6 Seiten)

$$= \Delta^3 \left(\frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3} \right)$$

$$= \Delta V \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})$$

Jetzt: 2 Würfel mit gemeinsamer Grenzfläche B:



Fluss durch B aus ① heraus = Fluss durch B in ② hinein

= - Fluss durch B aus ② heraus

(und umgekehrt)

Jetzt : bel. Volumen V :

Bezeichnung für <u>Rand- bzw. Oberfläche</u> von V : ∂V

Zerlege V in viele kleine Würfel an den Orten $\vec{x}_k$ [einzeichnen]

$\Rightarrow$ Gesamt-Durchfluss durch alle Würfeloberfl. =

$$= \sum_k \Delta V \ \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}_k)$$

| wieder: Ströme durch gemeinsame Grenzflächen („innere Trennwände") heben sich weg

= Durchfluss durch alle „Würfel-Aussenwände"

$\simeq$ Durchfluss durch ∂V (exakt für $\Delta V \to 0$)

$$= \iint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \iint_{\partial V} dA \ \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

$\uparrow$

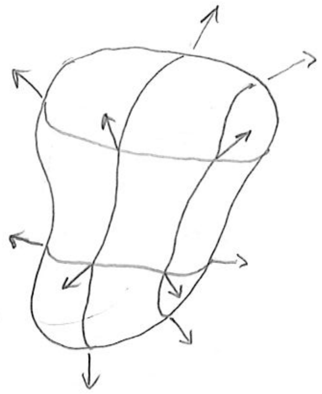
vgl. Kap. 14.4 (Oberflächenintegrale), 2. Sorte (S. 14.39)

Bem:

- Orientierung von ∂V : $d\vec{A}$ bzw. $\vec{n} := \dfrac{d\vec{A}}{\underbrace{|d\vec{A}|}_{=dA}}$ zeigt ..

immer „nach aussen"

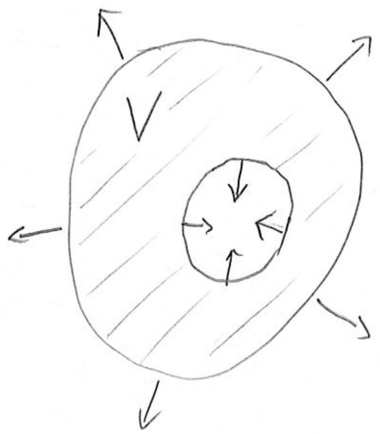
(Abfluss positiv, Zufluss neg.)



$\vec{n}(\vec{r})$

- Für „Löcher in V" analog

(∂V besteht dann aus „mehreren Stücken")



~

Andererseits:

$$\text{Gesamt-Durchfluss} = \sum_k \underbrace{\Delta V}_{=: d^3x} \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}_k)}_{=: \phi(\vec{x}_k)} \quad \text{Skalarfeld}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{exakt für } \Delta V \to 0}}{\simeq} \int_V d^3x \, \phi(\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alternative Schreibweise}}}{=} \int_V dV \, \phi(\vec{x})$$

(vgl. Kap. 13.4 (Integration im $\mathbb{R}^n$), S. 13.25)

Alles zusammen:

$$\boxed{\int_V dV \, \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = \iint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \iint_{\partial V} dA \, \vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{f}(\vec{r})}$$

<u>Integralsatz von Gauß</u>

Bem:

- Gilt für bel. $\vec{f}(\vec{x})$ (Interpretation als Massenstromdichte irrelevant) und bel. V (sogar mit „Löchern" oder mehreren „Fragmenten").
Einzige Voraussetzung: $\vec{f}(\vec{x})$ stetig diff'bar & Rand ∂V stückweise glatt und „nach aussen" orientiert.

- Falls V „ohne Löcher" (und „Fragmente"), dann ist ∂V geschlossene Oberfläche

$\Rightarrow$ statt $\iint\limits_{\partial V}$ oft auch $\oiint\limits_{\partial V}$ oder $\oint\limits_{\partial V}$ geschrieben

(analog zu $\oint\limits_{C}$ für geschlossene Wege).

- Falls V selbst sehr klein $\Rightarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x})$ „innerhalb V" praktisch konstant $\Rightarrow$

$$\int_V dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \xrightarrow[\text{für } V\to 0]{} \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \cdot \int_V dV = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x})\, V \Rightarrow$$

bel. Pkt. in V

- $$\operatorname{div}\vec{f}(\vec{x}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{v})$$

$\Rightarrow$ „Anschauliche Bedeutung der Divergenz":

- Netto-Durchfluss (= Abfluss − Zufluss) durch infinitesimale Oberfläche pro Volumen.

- Falls $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) \neq 0$ wird die zur „Stromdichte $\vec{f}$" gehörige Grösse (z.B. Materie bzw Masse für $\vec{f} = \rho\cdot\vec{v}$) innerhalb V bzw. am Ort $\vec{x}$ „erzeugt" bzw. „vernichtet".

Kurz: <u>Divergenz ist Mass für Quellen bzw. Senken</u> [$\hat{=}$ neg. Quellen]

Noch kürzer: $\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{f} \;\hat{=}\; \text{„Quellen von } \vec{f}\text{"}}$

daher $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0 \iff$ „$\vec{f}$ quellenfrei" (vgl. S. 14.54)

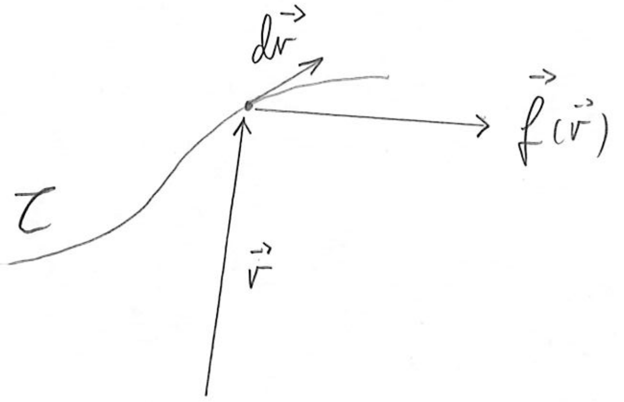
14.9 Satz von Stokes

[Lang & Pucker Kap. 7.5 & 9.3 , Weltner Kap. 18]

Betrachte Kraftfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{e}_k\, f_k}_{k=1,2,3}(\vec{x})$.

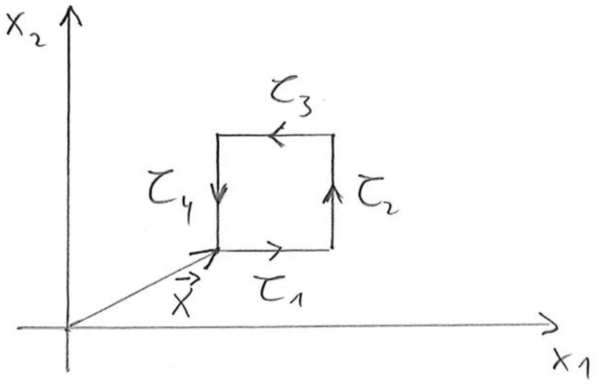
Arbeit entlang Weg $\vec{r}(t)$:

$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \;\hat{=}$ „Summe aller Teil-Arbeiten $d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$"



Vgl. Kap. 14.2 (Wegintegrale), 2. Sorte (S. 14.16)

Speziell : $\mathcal{C}$ geschl. Weg um kleines Quadrat in x_1-x_2-Ebene



Ort $\vec{x}$

Seitenlänge Δ

Fläche $\Delta A = \Delta^2$

<u>Orientierung</u> : positiver Drehsinn („links herum");

Def. der Orientierung von ΔA : $\vec{n} := \vec{e}_3$ („<u>Rechte-Hand-Regel</u>")

Frage: Arbeit entlang geschl. Weg $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}_4$?

Antw. : entlang $\mathcal{C}_1$: $\Delta \cdot f_1(\vec{x})$ (exakt für $\Delta \to 0$)

entlang $\mathcal{C}_3$: $-\Delta \cdot \underbrace{f_1(\vec{x} + \vec{e}_2 \cdot \Delta)}_{\simeq f_1(\vec{x}) + \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \cdot \Delta}$ — " —

— " —

$\Rightarrow$ entlang $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_3$: $- \Delta^2 \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2}$ — " —

Analog entlang $\mathcal{C}_4$ und $\mathcal{C}_2$: $+ \Delta^2 \dfrac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1}$

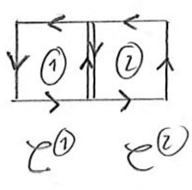
$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) \simeq \Delta^2\left(\frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2}\right)$$

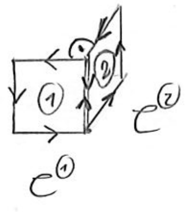
↑ exakt für $\Delta \to 0$

$$= \underbrace{\underbrace{\Delta^2}_{=\Delta A}\ \underbrace{\vec{e}_3}_{=\vec{n}}}_{\Delta\vec{A}} \cdot \left(\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{x})\right) = \Delta\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{x})\right)$$

Genauso für kleines Quadrat in x_2-x_3- bzw. x_3-x_1-Ebene.

Jetzt : 2 Quadrate mit gemeinsamer Grenze

(so : 

oder so : 

)

$\Rightarrow$ Beiträge zu $\oint_{\mathcal{C}^{(1)}\oplus\,\mathcal{C}^{(2)}} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ entlang gemeinsamer Grenzlinie heben sich weg.