Beisp:

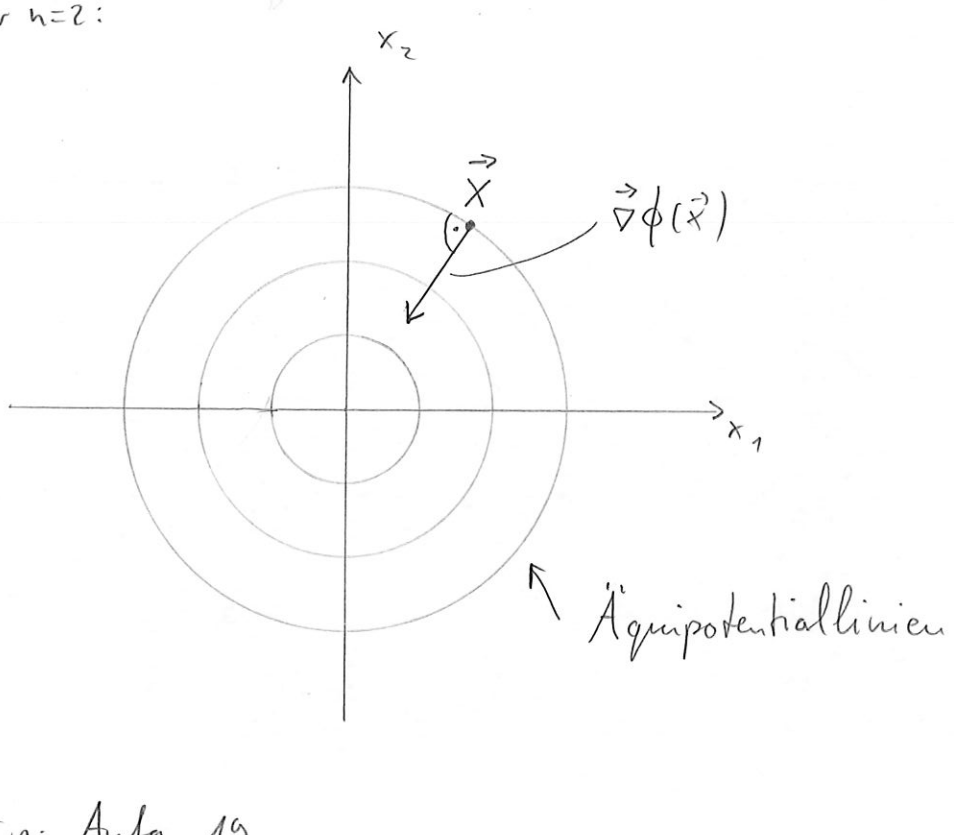
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-3/2} \cdot 2x_k$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k} = \vec{e}_k \frac{-x_k}{|\vec{x}|^3} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_x := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Skizze für $n=2$:



Weitere Beisp: Aufg. 19

14.6 Wegintegral eines Gradientenfeldes

Im Allg. hängt $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ von gesamter Raumkurve C ab.

Jetzt speziell:

$$\underline{\underline{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})}} \quad (\text{„Gradientenfeld"})$$

Beisp: $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$ („Potentialkraft")

↑ Konvention; U: pot. Energie, Potential

$$\Rightarrow \int_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t))}_{\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t))\ (\text{totale Abl.})}}_{=:\int_C d\phi(\vec{r})\ [\text{andere Schreibweise}]} = \phi(\vec{r}(t))\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} =$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} d\phi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)}$$

Nur von den Endpunkten $\vec{r}_{1,2} := \vec{r}(t_{1,2})$ von $\mathcal{C}$ abhängig,

nicht vom Verlauf dazwischen! (gilt für bel. $\mathcal{C}$)

$\overset{\text{per Def.}}{\Leftrightarrow}$ „Integral ist wegunabhängig“

Umkehrung: Falls $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ wegunabh., dann

ist $\vec{f}(\vec{x})$ ein Gradienfeld, d.h. es ex. ein

Skalarfeld $\phi(\vec{x})$ mit $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$.

Bew: Sei $\vec{x}$ bel. aber fest. Wähle irgend einen Weg $\vec{r}(t)$, der von einem

festen $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$ führt, d.h. $\vec{r}(t_0) = \vec{x}_0$, $\vec{r}(t_1) = \vec{x}$.

Def: $\phi(\vec{x}) := \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ [„wohldef.": nur von $\vec{x}$ abh.]

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}(t)) = \int_{t_0}^{t} dt' \, \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{f}(\vec{r}(t')) \quad \forall t \quad [\vec{x} \text{ bel. aber fest}]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad \forall t \quad [\text{Hauptsatz der Int.-Rechnung}]$$

$\parallel$ tot. Abl.

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t))$$

$$\overset{t=t_1}{\Rightarrow} \dot{\vec{r}}(t_1) \cdot \Big(\vec{\nabla}\phi(\underbrace{\vec{r}(t_1)}_{\vec{x}}) - \vec{f}(\underbrace{\vec{r}(t_1)}_{\vec{x}}) \Big) = 0$$

Muss für jeden Weg $\vec{r}(t)$ von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$ gelten $\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t_1)$ bel. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}) \overset{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \quad \text{q.e.d.}$$

Bem: $\phi(\vec{x})$ nur bis auf additive Konstante festgelegt

[$\Leftrightarrow$ „Integrationskonstante" $\Leftrightarrow$ $\vec{x}_0$ frei wählbar

$\Leftrightarrow$ $\phi(\vec{x})$ eine Art „Stammfkt." von $\vec{f}$, sog. „Potential"]

Fazit: $\vec{f}(\vec{x})$ Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ wegunabh. $(\forall\, \mathcal{C})$

$\Leftrightarrow$ $\oint d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Wege $\mathcal{C}$

↑

Bew: Aufg. 26

14.7 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

Betrachte VF

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{e}_k x_k}_{k=1,2,3} \longmapsto \vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{e}_k f_k(\vec{x})}_{k=1,2,3}$$

und Nabla-Op. $\vec{\nabla} := \underbrace{\vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$.

Defs:

mit oder ohne Klammer

$$\operatorname{div}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_3}$$ „Divergenz" (SF)

Skalarfeld

$$\operatorname{rot}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$ „Rotation" (VF)

vgl. Aufg. 7; Divergenz sofort auf $\mathbb{R}^n$ übertragbar, nicht aber Rotation.

Def. & Satz 1:

Zu jedem VF $\vec{f}(\vec{x})$ ex. ein SF $\phi(\vec{x})$ („skalares Potential")

und ein VF. $\vec{A}(\vec{x})$ („Vektorpotential") so, dass

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) + \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})}$$

(Helmholtzscher Hauptsatz der Vektoranalysis).

Bem: $\phi(\vec{x})$ und $\vec{A}(\vec{x})$ nicht eindeutig.

Bew: Kap. 18.2 (?)

Def. & Satz 2 :

Falls $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ heisst $\vec{f}(\vec{x})$ wirbelfrei.

Für ein Gradientenfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ folgt mit Aufg. 9a :

$$\text{rot}\, \vec{f}(\vec{x}) = \text{rot}\left(\text{grad}\ \phi(\vec{x})\right) = \vec{0}.$$

Beh.: Umkehrung gilt ebenfalls, d.h.

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\ \left(\vec{f}\ \text{Gradientenfeld}\right) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\ \left(\vec{f}\ \text{wirbelfrei}\right)}$$

$\Leftrightarrow \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ wegunabh.

Kap. 14.6

$\Leftrightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Wege C

Bem: $\phi(\vec{x})$ (skalares Potential) nicht eindeutig.

Bew: Kap. 14.9 (3) und Kap. 18.2 (3)

Def. & Satz 3:

Falls $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = 0$ heisst $\vec{f}(\vec{x})$ quellenfrei.

Falls $\vec{f}(\vec{x})$ sich schreiben lässt als $\vec{f}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x})$

für ein geeignetes $\vec{A}(\vec{x})$, dann folgt mit Aufg. 9b:

$$\mathrm{div}\,\vec{f}(\vec{x}) = \mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x})\right) = 0$$

Beh: Umkehrung gilt ebenfalls, d.h.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{x}) = 0 \ \left(\vec{f}\ \text{quellenfrei}\right) \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})}$$

Bem: $\vec{A}(\vec{x})$ (Vektorpotential) nicht eindeutig.

Bew: Kap. 18.2 (?)

Bem:

- Sätze 1-3 eng verwandt, aber keiner folgt direkt aus den anderen.

- Voraussetzungen: $\vec{f}(\vec{x})$ 1-mal, $\phi(\vec{x})$ & $\vec{A}(\vec{x})$ 2-mal stetig diff'bar; $D \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, Rand von D stückweise glatt.

- wichtig z.B. für Elektrodynamik und Hydrodynamik. Dort auch: explizite Bestimmung von ϕ & $\vec{A}$ in $\vec{f} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\times\vec{A}$ zu gegebenem $\vec{f}$.

- Beisp: Aufg. 23, ...