Beisp: Kugeloberfläche

$$\vec{r}(\overset{u_1}{\vartheta}, \overset{u_2}{\varphi}) = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad , \quad (\vartheta,\varphi) \in T = [0,\pi] \times [0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overbrace{\vec{r}}^{=\vec{r}(\vartheta,\varphi)}}{\partial\vartheta} = R \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R^2 \begin{pmatrix} 0 - (-\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos\varphi \\ (-\sin\vartheta)(-\sin\vartheta\sin\varphi) - 0 \\ \cos\vartheta\sin\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \right| = R^2 \left(\sin^4\vartheta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta \right)^{1/2}$$

$$= R^2 \left(\sin^2\vartheta \left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \right) \right)^{1/2} \underset{\sin\vartheta \geq 0 \ \forall \vartheta \in [0,\pi]}{=} R^2 \sin\vartheta$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A_B = \iint_T d\vartheta\, d\varphi \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \quad \Big| \text{ vgl. Kap. 13.4}$$

$$= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \; R^2 \sin\vartheta = R^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1}_{\varphi \big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0}$$

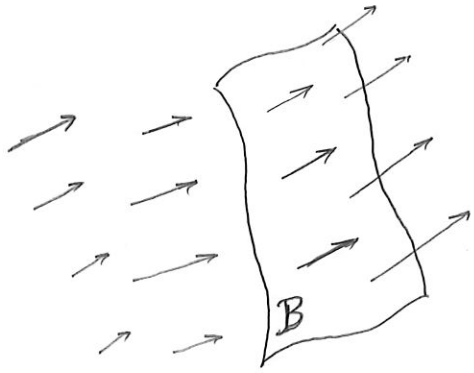
$$= 2\pi R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{-\cos\vartheta \big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2}$$

$$= 4\pi R^2 \quad \checkmark$$

Weitere Beisp: Aufg 18, 21

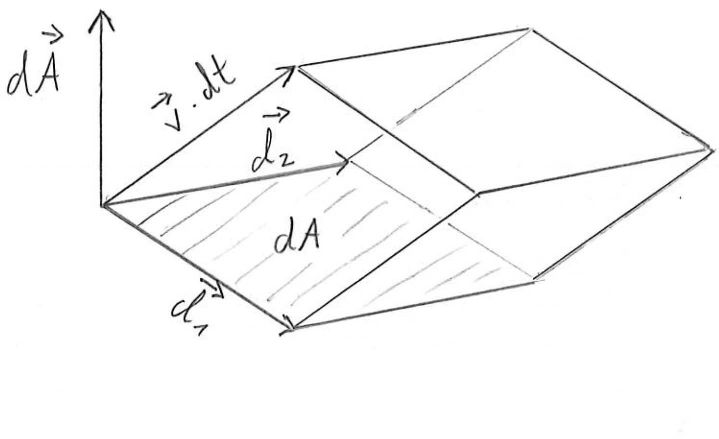
<u>2. Sorte</u>: z.B. Strömung einer Flüssigkeit mit Dichte $\rho(\vec{x})$

und Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$



<u>Fluss/Strom</u> (Masse pro Zeit) <u>durch Flächenstück B</u> ?

Infinitesimal: [alle Argumente „$\vec{x}$" weggelassen!]



Volumen: $\underbrace{(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)}_{=:\, d\vec{A} \,=\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_1 du_2} \cdot \vec{v}\, dt$ (Spatprodukt)

s. oben

$\Rightarrow$ Masse pro Zeit „durch dA" $\hat{=} \underbrace{\rho \vec{v}}_{=: \vec{f}} \cdot d\vec{A}$

(exakt für $d\vec{A} \to \vec{0}$)

$$\frac{d\vec{A}}{dA} = \frac{\frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right|} =: \vec{n}(\vec{r}(\vec{u})) \quad \text{(Einheits-) Normalenvektor}$$

(W: $\vec{T}(t) := \dfrac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$)

Summation über alle Flächenelemente $\Rightarrow$ Gesamtfluss/-strom

$$\iint_B d\vec{A}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \iint_B dA\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{f}(\vec{r}) := \iint_T du_1\,du_2 \left(\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1}\times\frac{\partial\vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2}\right)\cdot\vec{f}(\vec{r}(\vec{u}))$$

andere Schreibweise

$$\left(W: \int_C d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) = \int_I dt\,\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))\right)$$

Beisp: Aufg. 20.

3. Sorte: Oberflächenintegral eines Skalarfeldes $\phi(x)$ ganz

analog:

$$\iint_B dA\, \phi(\vec{r}) := \iint_T du_1\, du_2 \left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right| \phi(\vec{r}(\vec{u}))$$

$$\left(W:\ \int_C ds\, \phi(\vec{r}) = \int_I dt\, |\dot{\vec{r}}(t)|\, \phi(\vec{r}(t)) \right)$$

- Spezialfall: $\phi(\vec{x}) = 1 \ \forall \vec{x} \Rightarrow$ Flächeninhalt (1. Sorte)

- Weitere Sorten: $\iint_B dA\, \vec{f}(\vec{r})$, $\underbrace{\iint_B d\vec{A} \times \vec{f}(\vec{r})}_{dA\,(\vec{n}\times\vec{f})}$, ...

$\downarrow$

sollte klar sein: „komponentenweise“ , $dA\,(\vec{n}\times\vec{f})$

Ohne Bew. (Details nicht ganz einfach!):

Integrale sind wieder <u>unabhängig von Parametrisierung</u> $\vec{r}(\vec{u})$ von B

(unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an $\vec{r}(\vec{u})$ analog

zu W: $\vec{r}(t)$ muss „orientierter Weg" sein, mit $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0 \ \forall t$)

14.5 Skalare Felder: Niveauflächen und Gradienten

[Lit.: Weltner Kap. 14.3.2; Lang & Pucker, Kap. 7.4]

Betrachte Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ heisst $N_\lambda := \{ \vec{x} \in D \mid \phi(\vec{x}) = \lambda \}$

eine Niveaufläche oder Äquipotentialfläche

(bzw. -linie für $n=2$ bzw. -hyperfläche für $n \geq 4$).

Beisp: $\phi(\vec{x}) := \dfrac{1}{|\vec{x}|}$, $D := \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ $\Longrightarrow$

„ohne"

$\phi(\vec{x}) \overset{!}{=} \lambda \iff |\vec{x}| \overset{!}{=} 1/\lambda$ $\Longrightarrow$

N_λ Kreis für $n=2$, Kugelfläche für $n=3$,

„Hyperkugelfläche" für $n \geq 4$ (falls $\lambda > 0$;

andernfalls: $N_\lambda = \{\}$).

Ganz allg.: $N_\lambda \hat{=}$ $n-1$-dim. „Hyperfläche" $\subset \mathbb{R}^n$

[ev. auch leer oder sonstige untypische Ausnahme].

Defs:

[mit oder ohne Klammern]

- $$\underline{\underline{\mathrm{grad}\,(\phi(\vec{x})) := \underbrace{\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}}$$

sog. Gradientenfeld (ist VF!) oder Gradient (von $\phi(\vec{x})$), vgl. Übungen.

- $$\underline{\underline{\vec{\nabla} := \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}}} \underbrace{= \nabla = \vec{\partial} = \vec{e}_k \partial_k = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}}_{\text{alternative Schreibweisen}}$$

sog. Nabla-Operator

Folgerungen:

- $$\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})}}$$

- Totale Ableitung (vgl. Kap. 13.1, S. 13.9)

Weg

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}\phi(\vec{x}(t))}} \overset{\text{„Kettenregel"}}{=} \underbrace{\frac{\partial \phi(\vec{x}(t))}{\partial x_k} \cdot \frac{d x_k(t)}{dt}} = \underline{\underline{\vec{\nabla}\phi(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)}}$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{d\phi(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}}$ sog. <u>totales Differential</u>

$\hookrightarrow \phi(\vec{x}+d\vec{x}) - \phi(\vec{x})$ für $d\vec{x} \to \vec{0}$

$\hat{=}$ „infinit. Feldänderung bei Ortänderung $d\vec{x}$"

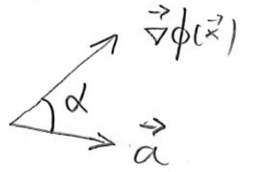
~

Speziell: $\vec{x}_a(t) := \vec{x} + \vec{a} \cdot t$, $\vec{x}, \vec{a}$ bel. aber fest, $|\vec{a}| = 1$,

t variabel $\Rightarrow$ $\vec{x}_a(t)$ ist Weg bzw. Gerade

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\left.\frac{d\phi(\vec{x}_a(t))}{dt}\right|_{t=0} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \cdot \vec{a}}}$$ sog. <u>Richtungsableitung</u>

$$= |\vec{\nabla}\phi(\vec{x})| \cdot \underbrace{|\vec{a}|}_{=1} \cdot \cos\alpha$$



$\hat{=}$ „Änderung von $\phi(\vec{x})$ in Richtung $\vec{a}$" ,

ist maximal für $\alpha = 0$, d.h. $\vec{a} \parallel \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ $\Rightarrow$

<u>$\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ zeigt in Richtung maximaler Zunahme von $\phi(\vec{x})$</u> ,

$\vec{a} \perp \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ $\Leftrightarrow$ „$\phi(\vec{x})$ ändert sich nicht" $\Rightarrow$

<u>$\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ steht senkrecht zur Niveaufläche durch $\vec{x}$.</u>

~