3. Sorte:

Wegintegral eines Skalarfeldes (SF) $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$

ganz analog definiert:

$$\int_{\mathcal{C}} ds\ \phi(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt\ |\dot{\vec{r}}(t)|\ \phi(\vec{r}(t))$$

[kein eigenes Symbol wie vorhin $S_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}}$]

Bem:

- wieder unabh. von Parametrisierung.
- Spezialfall $\phi(\vec{x}) = 1 \ \forall \vec{x}$ $\Rightarrow$ Wegintegral (1. Sorte).
- nicht so wichtig in Physik $\Rightarrow$ kein Beisp. hier.

[z.B. $\mathcal{C} \mathrel{\hat{=}}$ Polymer, $\phi \mathrel{\hat{=}}$ Dichte = Masse/Länge]

- Weitere Sorten: —"—   [z.B. $\int_{\mathcal{C}} ds\ \vec{f}(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt\ |\dot{\vec{r}}(t)|\ \vec{f}(\vec{r}(t))$ „Komponentenweise"]

14.3 Flächen

Fläche $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \supset T \to B \subset \mathbb{R}^n$ $\quad (n \geq 2,$ meist $n = 3)$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} r_1(u_1, u_2) \\ \vdots \\ r_n(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \underbrace{\vec{e}_k \, r_k}(\vec{u})$$

[d.h. wieder ein VF!]

(Vgl. mit Weg (Abk. „W") $\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{e}_k \, r_k}(t)$)

Flächenstück $B := \{ \vec{r}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in T \}$ (Hyperfläche, Hyperebene, ...)

(W: Raumkurve $C := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$)

Namen:

$\vec{u}$ „Parameter"

T „Parameterbereich"

$\vec{r}(\vec{u})$ „Parametrisierung von B" [analog zu W]

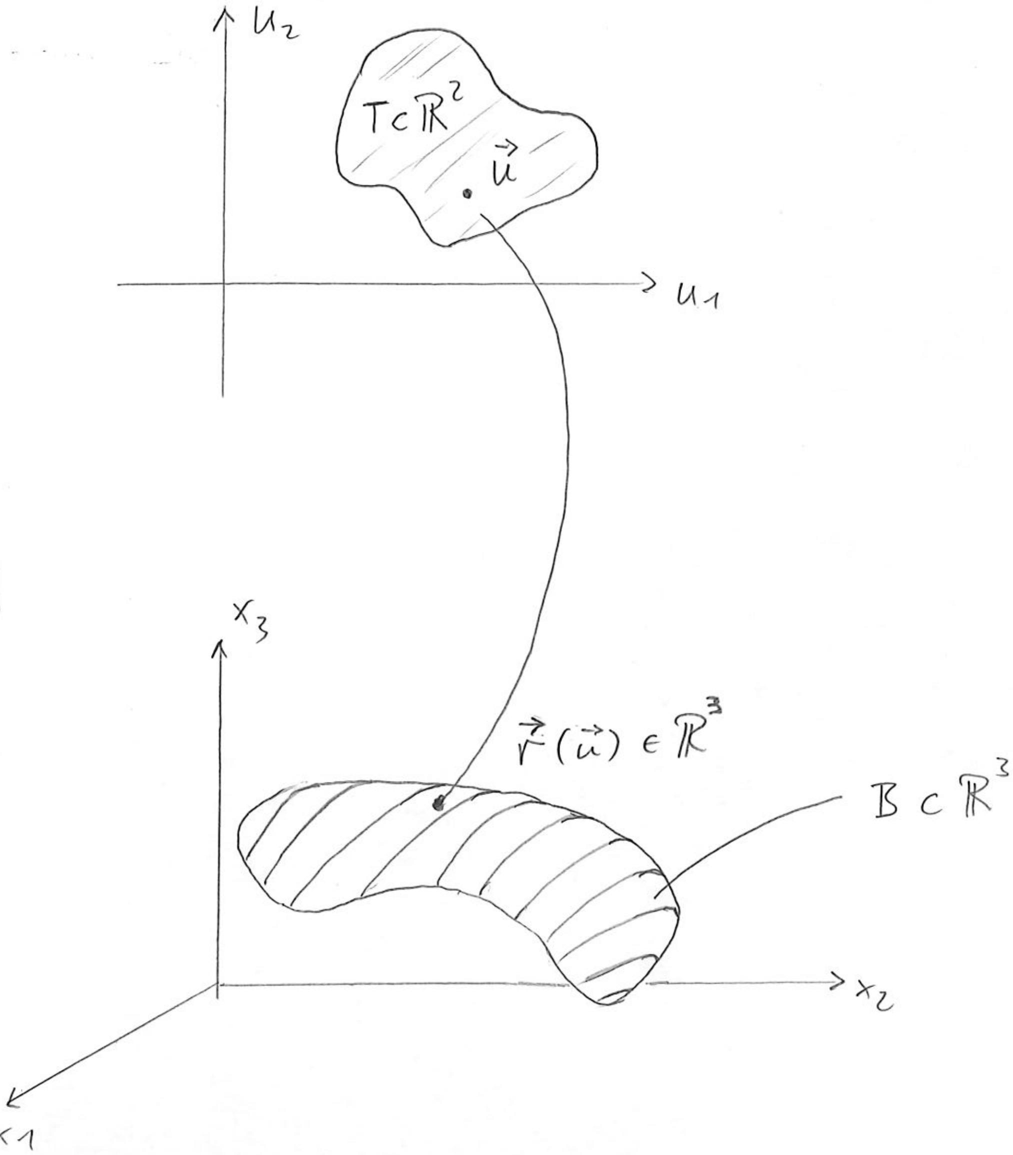
Stillschweigende Voraussetzungen:

- T „echt 2-dim." (nicht „Linie", „Pkt.", leer, ...)
- $\vec{r}(\vec{u})$ bijektiv (ein-eindeutig) (W: $\vec{r}(t)$ „kehrt nicht um")
- $\vec{r}(\vec{u})$ hinreichend oft diff'bar [$\Rightarrow$ T & B zusammenhängend]

[alles analog zu W]

<u>Veranschaulichung</u>

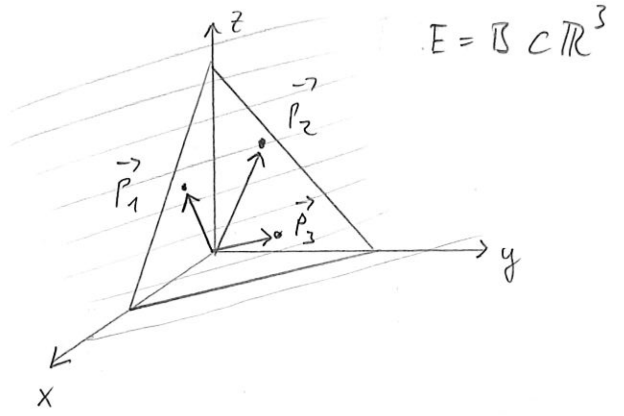
[n=3]



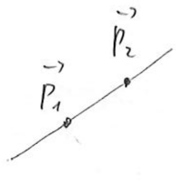
1. Beisp.: [Lang & Pucker Kap. 3.3.3]

Ebene im $\mathbb{R}^3$ ($\Rightarrow$ oft „E" statt „B"). Klar:

(i) $E = B$ durch 3 P'kte bzw. Ortsvektoren $\vec{p}_{1,2,3}$ festgelegt

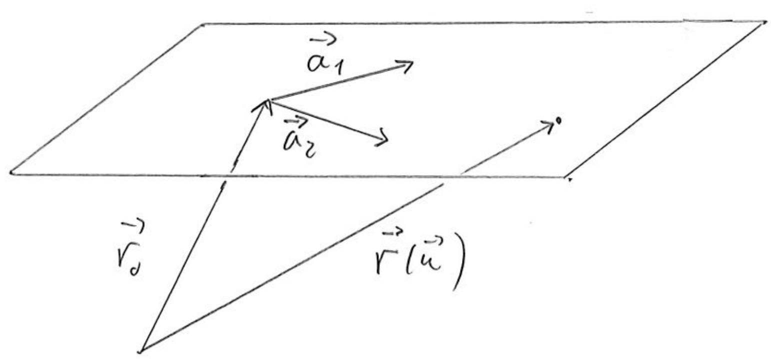


($\vec{p}_{1,2,3} \in E$ beliebig, nur nicht auf einer Linie)

(W: Gerade G durch 2 P'kte )

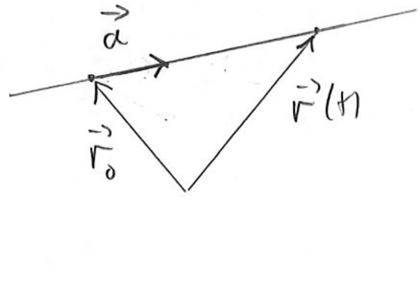
(ii) Jeder Pkt. in $E = \mathbb{B}$ ist von der Form

$$\underline{\underline{\vec{r}(u_1, u_2) = \vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2}} \quad , \quad u_{1,2} \in \mathbb{R}$$



- $\vec{r}_0 \in E$ beliebig (z.B. $\vec{p}_1$) : sog. Stützpkt./Stützvektor
- $\vec{a}_{1,2}$ zwei sog. Richtungsvektoren (z.B. $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ und $\vec{p}_3 - \vec{p}_1$),

  nicht parallel und nicht $\vec{0}$, ansonsten beliebig. $[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}]$

($W: \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, )

$\Leftrightarrow \quad \vec{r} : T = \mathbb{R}^2 \rightarrow B = E \subset \mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u}) = \vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2$$

(klar: ist bijektiv)

- Viele verschiedene $(\vec{r}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ bzw „Parametrisierungen" $\vec{r}(\vec{u})$ von B möglich.

(W : analog)

- Im $\mathbb{R}^n$: alles genauso. (Aber jetzt weitere „Hyperebenen" der Form

$$\vec{r}(u_1, \dots, u_m) = \vec{r}_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k \vec{a}_k \quad , \quad m = 3, 4, \dots, n-1 .$$

Hier nicht weiter behandelt).

(iii)

- Definiere

$$\vec{n} := \vec{a}_1 \underset{\text{Kreuzprod.}}{\times} \vec{a}_2 \quad \text{sog. Normalenvektor} \quad \left(\neq \vec{0}\,,\ \perp \vec{a}_{1,2} \Rightarrow \perp E \right)$$

$$\vec{e}_n := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad \text{(normiert)}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\vec{u}) \cdot \vec{n} = \left(\vec{r}_0 + u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 \right) \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} + \vec{0} + \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{r}(\vec{u}) - \vec{r}_0 \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw} \quad \underline{(\vec{x} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \ \forall \vec{x} \in E}$$

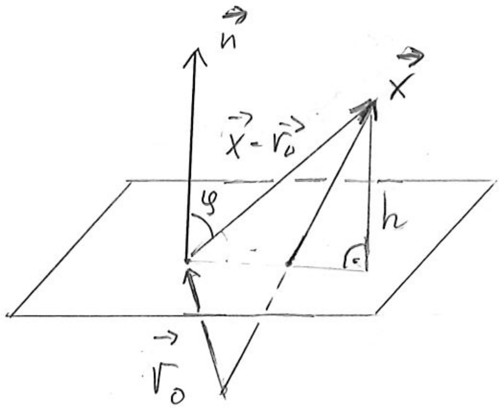
sog. <u>Hessesche Normalform</u> (für jedes $\vec{r}_0 \in E$!)

- Definiere $a := n_1,\ b := n_2,\ c := n_3\,,\ q := \vec{r}_0 \cdot \vec{n}\,,\ \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{a\, x_1 + b x_2 + c \cdot x_3 = q} \qquad \text{sog. } \underline{\text{Ebenengl.}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{B} = E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid a x_1 + b x_2 + c x_3 = q \} \quad (\text{„Lösungsmenge"}!)$$

- Abstand d eines P'ktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene E?



$$h = |\vec{x}-\vec{r_0}| \cdot \cos\varphi$$

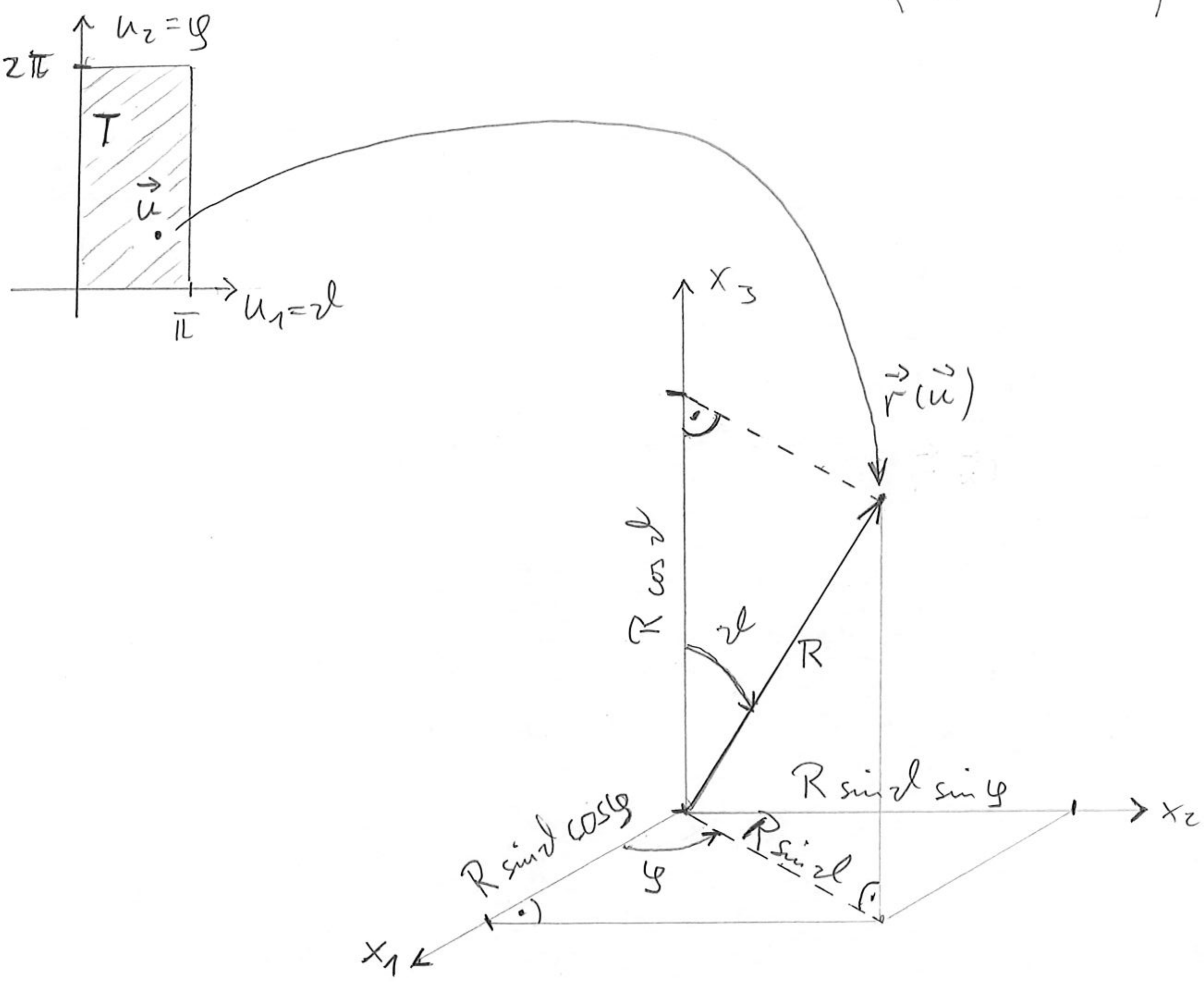
$$(\vec{x}-\vec{r_0}) \cdot \vec{n} = |\vec{x}-\vec{r_0}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\varphi = h \cdot |\vec{n}| \,, \quad d = |h|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{d = |(\vec{x}-\vec{r_0}) \cdot \vec{e}_n|}} \qquad (\text{für jedes } \vec{r_0} \in E;\ d=0 \Leftrightarrow \text{Hesse})$$

2. Beisp: Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ (Radius R)

$$\vec{r}: T := [0,\pi] \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to B \subset \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 =: \vartheta \\ u_2 =: \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{array}{l} R \text{ Radius} \\ \vartheta \text{ Polarwinkel} \\ \varphi \text{ Azimutalwinkel} \end{array}\right\} \text{Kugelkoordinaten}$$

Klar: ist bijektiv, d.h.

zu jedem Pkt. auf Kugeloberfl. gehört ein und nur

ein Paar $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

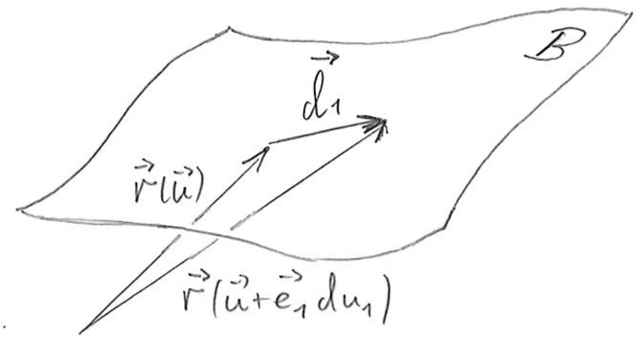
14.4 Oberflächenintegrale

Es geht um „Integrale über Flächenstücke B",

dabei gibt es wieder verschiedene „Sorten"

(vgl. Kap. 14.2 Wegintegrale)

1. Sorte: „Flächeninhalt" A_B von $B \subset \mathbb{R}^3$:



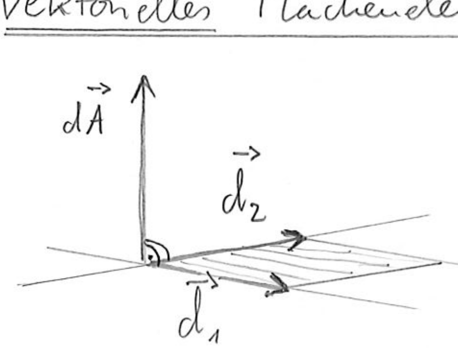
- $\vec{d}_1 = \vec{r}(\vec{u}+\vec{e}_1 du_1) - \vec{r}(\vec{u}) \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} du_1$

  ↑ vgl. Kap. 13.1, exakt für $du_1 \to 0$

- genauso $\vec{d}_2 \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} du_2$

- vektorielles Flächenelement $d\vec{A} := \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \simeq \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} du_1 du_2$

  (exakt für $du_{1,2} \to 0$)



- $dA := |d\vec{A}|$ infinit. Flächeninhalt, Flächenelement

- Summation über alle Flächenelemente ⇒

$$\text{Gesamtfläche } A_B = \iint_B dA := \iint_T du_1 du_2 \left| \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}(\vec{u})}{\partial u_2} \right|$$

↑

andere Schreibweise für A_B

„gewöhnliches 2-dim. Integral", vgl. Kap. 13.4

↑

daher „$\iint$"

$$\left(W: \; S_C = \int_C ds := \int_{I = \int_{t_1}^{t_2}} dt \, |\dot{\vec{r}}(t)| \right)$$

$\sim$