2.) $n=2$, $\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$, $t \in [0, \sqrt[3]{T}]$

$\Rightarrow$ selben $\mathcal{C}$ wie in 1.), aber andere Parametrisierung $\vec{r}(t)$!

[könnte man auch $\vec{y}(\tau)$ nennen]

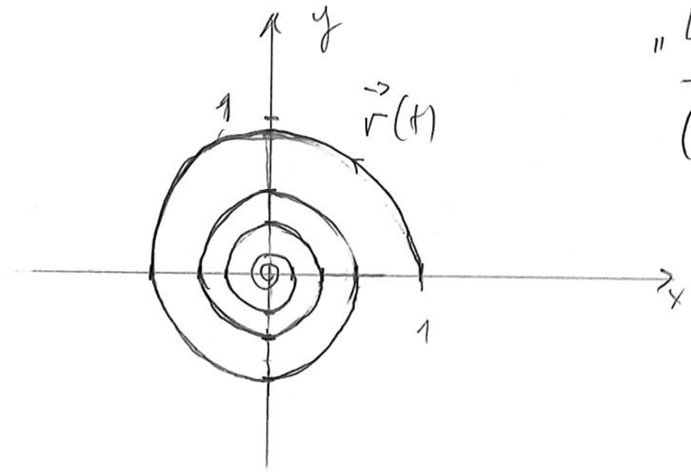
$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t^3) \cdot 3t^2 \\ \cos(t^3) \cdot 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{[3t^2 \sin(t^3)]^2 + [3t^2 \cos(t^3)]^2} = \sqrt{9t^4 \underbrace{[\sin^2(t^3) + \cos^2(t^3)]}_{=1}} =$$

$$= 3t^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} = \int_0^{\sqrt[3]{T}} dt \cdot 3t^2 = t^3 \Big|_0^{\sqrt[3]{T}} = T \quad ✓$$

3.) $\vec{r}(t) := e^{-at}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t \in [0,T]$



„Logarithmische Spirale"

(mit $a = 0{,}1$)

$[e^{-0{,}1\cdot 2\pi} \simeq 0{,}53]$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = e^{-at}(-a)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + e^{-at}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-at}(-a\cos t - \sin t)\\ e^{-at}(-a\sin t + \cos t)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{(e^{-at})^2\underbrace{\Big[\underbrace{(-a\cos t - \sin t)^2}_{a^2\cos^2 t + \cancel{2a\cos t\sin t} + \sin^2 t} + \underbrace{(-a\sin t + \cos t)^2}_{a^2\sin^2 t - \cancel{2a\sin t\cos t} + \cos^2 t}\Big]}_{a^2+1}}$$

$$= e^{-at}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_C}} = \int_0^T dt\, e^{-at}\sqrt{1+a^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{-a}\underbrace{e^{-at}\Big|_0^T}_{e^{-aT}-1} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(1-e^{-aT}\right)}}$$

- Bleibt endlich für $T \to \infty$! (falls $a > 0$)

Weitere Beisp.: Ü

[„Problem": $\int_{t_1}^{t_2} dt\, |\dot{\vec{r}}(t)|$ oft nicht „geschlossen" lösbar!]

2. Sorte:

Gegeben: VF $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $[m=n]$ & Weg $\vec{r}: [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x})$

Def:

$$W_{\mathcal{C}} := \int_{t_1}^{t_2} dt \; \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad \text{oder auch} \quad \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t))}_{\text{oder } \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)} \, dt$$

Andere Schreibweisen:
$$\int_{\mathcal{C}} \underbrace{d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})}_{\text{oder } \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} = \int_{\mathcal{C}} dr_k \, f_k(\vec{r})$$

Beisp.: $n = 3$, $\vec{f}(\vec{x}) \mathrel{\hat{=}}$ „Kraftfeld".

Physik:  Arbeit := „Weg × Kraft in Richtung des Weges" $\Rightarrow$

$d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \mathrel{\hat{=}}$ „Arbeit entlang Wegstück $d\vec{r}$" (exakt für $d\vec{r} \to \vec{0}$)

$$dt \, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r})}_{\text{„Leistung} \,\hat{=}\, \text{Kraft} \times \text{Geschw."}} \mathrel{\hat{=}} \text{„während } dt \text{ geleistete Arbeit"}$$

$\Rightarrow W_{\mathcal{C}} \mathrel{\hat{=}}$ „Summe aller Teil-Arbeiten"

$\mathrel{\hat{=}}$ gesamte Arbeit entlang $\mathcal{C}$

↳ work

Wieder: [vgl. S.14.11]

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\ \underbrace{\dot{\vec{y}}(\tau)}_{\dot{\vec{r}}(t(\tau))\cdot\frac{dt(\tau)}{d\tau}} \cdot \vec{f}(\underbrace{\vec{y}(\tau)}_{\vec{r}(t(\tau))}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))$$

$\Rightarrow$ $W_{\mathcal{C}}$ ist unabh. von Parametrisierung von $\mathcal{C}$,

[nur Eigenschaft von $\mathcal{C}$ & $\vec{f}$ alleine.]

Daher Schreibweise $\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ [siehe oben],

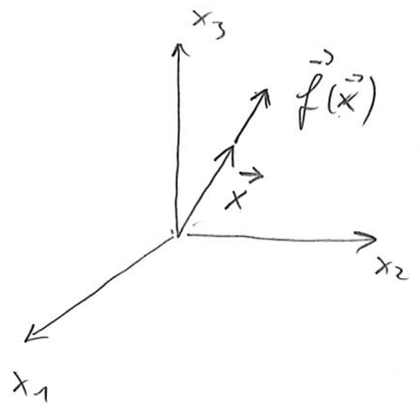
aber um „wirklich zu rechnen" ist $\int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t))$

besser geeignet!

Beisp:

1.) $n = 3$, $\vec{f}(\vec{x}) := \gamma \frac{1}{|\vec{x}|^2} \vec{e}_x$, $\gamma = \text{const.}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$,

$\vec{e}_x := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ (Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$)

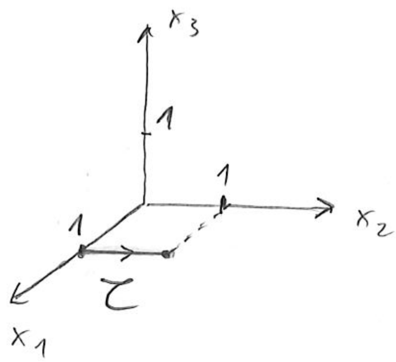


„Zentralkraft" bzw. „radialsymm. $\frac{1}{r^2}$-Kraft",

z. B. Gravitation (Newton), Coulombkraft, ...

$$\Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) = \gamma \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \gamma \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0, 1]$$



„Gerade"

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma \frac{1}{(1^2+t^2+0^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma (t^2+1)^{-3/2} \cdot t$$

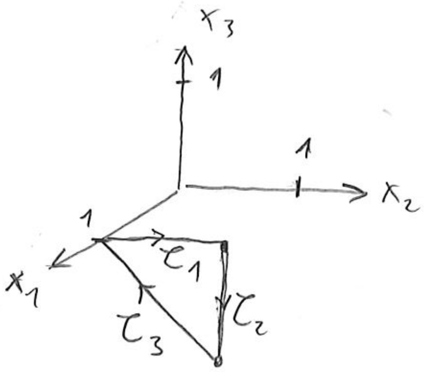
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{W_{\mathcal{C}}}} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) = \int_0^1 dt \; \gamma (t^2+1)^{-3/2} \cdot t$$

$$= \gamma \left(-(t^2+1)^{-1/2} \right) \Big|_0^1 = \gamma \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \right) = \underline{\underline{\gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}}$$

$\downarrow$

denn: $\quad \frac{d}{dt} (t^2+1)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (t^2+1)^{-3/2} \cdot 2t$

2.)



$$\vec{r}_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [0,1] \qquad (\text{wie in } 1.)$$

$$\vec{r}_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \qquad -\text{''}-$$

$$\vec{r}_3(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ -1+t \end{pmatrix} \qquad -\text{''}-$$

$\mathcal{C}_k \hat{=}$ (orientierte) Teilwege $(k = 1, 2, 3)$

$\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_3$ „geschlossener Weg"

↑ „Zusammensetzung" von Wegen

$$\Rightarrow W_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = W_{\mathcal{C}_1} + W_{\mathcal{C}_2} + W_{\mathcal{C}_3}$$

Symbol für geschlossenen Weg

so kann man „komplizierte" Wege zusammensetzen!

1.)

$$\underline{W_{\mathcal{C}_1} = \gamma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underline{W_{\mathcal{C}_2}} = \int_0^1 dt\ \gamma\left(1^2+1^2+t^2\right)^{-3/2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-t\end{pmatrix}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}^{\dot{\vec{r}}_2(t)}}_{t} = \gamma\left(-\left(t^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^1$$

denn: ... (s. oben)

$$= \underline{\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underline{W_{\mathcal{C}_3}} = \int_0^1 dt\ \gamma\Big(1^2 + \underbrace{(1-t)^2 + (-1+t)^2}_{2(t-1)^2}\Big)^{-3/2} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1-t\\-1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}_{2(t-1)}$$

$$= \gamma\left(-\left(2(t-1)^2+1\right)^{-1/2}\right)\Big|_0^1 = \underline{\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

denn: ... (s. oben)

$$\Rightarrow \underline{W_{\mathcal{C}} = 0}$$

Später : $W_{\mathcal{C}} = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\mathcal{C}$!

(und $\vec{f}(\vec{x})$ wie oben $\Rightarrow \vec{0} \overset{!}{\notin} \mathcal{C}$)