Rechenmethoden der Physik II (SoSe 24)

P. Reimann

Internetseite: siehe ekW.

Mi 12:15 - 13:45 in H5 (ausser 1.5 ⟹ 14 Termine)

Übungen: Freitags (15 Termine)

8-10
12-14 (4 Gruppen)
14-16

14 Vektoranalysis

Wiederholung (Kap. 4):

$$\underline{\underline{\mathbb{R}^n}} := \left\{ \vec{v} := \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} \;\middle|\; v_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots, n \right\}$$

[Menge von Vektoren]

(sog. Spaltenvektor)

Alternativ: $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ (sog. Zeilenvektor),

manchmal auch mit $\vec{v}^T$ bezeichnet.

„transponiert"

Algebr. Struktur:

$$\underline{\vec{u} + \vec{v} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}}, \qquad \underline{\lambda \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

[komponentenweise]

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ wird <u>n-dim.</u> <u>Vektorraum</u> (VR).

Mit $\vec{e}_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Komponente folgt

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \vec{e}_k \overset{\vec{v}\cdot\lambda := \lambda\vec{v}}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k \, v_k$$

$\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ heisst (eine) Basis (von $\mathbb{R}^n$) bzw. „Kartesisches Koordinatensystem"

Im $\mathbb{R}^3$ auch $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ oder $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Skalarprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ wird ein Hilbertraum (HR).

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ „orthogonal" (senkrecht, $\vec{u} \perp \vec{v}$) $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $[\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}]$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Kronecker) [$\vec{e}_k$ paarweise orthogonal]

Betrag, Norm, (Euklid'sche) Länge:

$$|\vec{v}| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2} = \sqrt{\underset{\vec{v}\cdot\vec{v}}{\underset{\uparrow}{\vec{v}^2}}}$$

$\vec{v}$ Einheitsvektor (normierter Vektor) $\Leftrightarrow$ $|\vec{v}| = 1$.

z.B. $|\vec{e}_k| = 1 \quad \forall k$

$\Rightarrow$ $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ heisst (eine) eine „Orthogonalbasis" (ONB)

Einstein'sche Summenkonvention:

„über doppelt vorkommende Indizes wird summiert".

Beisp.:

- $u_k v_k := \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ (oft auch „$u_k v_k$")

  $\Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_k v_k$

- $\vec{v} = v_k \vec{e}_k = \vec{e}_k v_k$

- $|\vec{v}| = \sqrt{v_k v_k}$

Ist „elegant" aber manchmal „missverständlich".

[⇒ wir werden die Konvention nur gelegentlich verwenden]

14.1 Wege und Raumkurven

Dasselbe wie „vektorwertige Fkt'en" (Kap. 4, 8.5):

„Teilmenge"

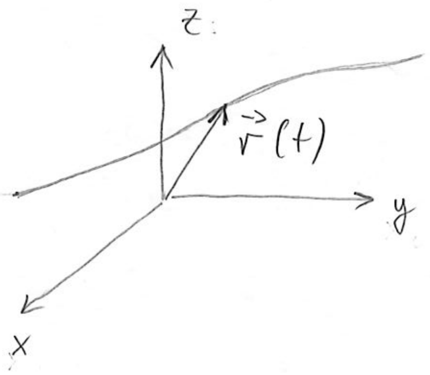
$$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n \quad , \quad I := [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \quad , \quad t_1 \leq t_2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, \vec{e}_k = \underbrace{\vec{e}_k\, r_k(t)}$$

$\Leftrightarrow$ Spezialfall eines Vektorfeldes (Kap. 13)

Name: <u>Weg</u>, Kurve, ...

Skizze für $n = 3$:



Zugehörige sog. Raumkurve, Bahnkurve, Trajektorie, Bogen, ... :

$$\mathcal{C} := \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \} \quad (\subset \mathbb{R}^n)$$

↑ „schön C"

Bem:

- verschiedene Wege $\vec{r}(t)$ können dieselbe Raumkurve $\mathcal{C}$ „parametrisieren".

- ab jetzt nur noch $\vec{r}(t)$, die nicht „zwischendurch umkehren", d.h. kein Teil von $\mathcal{C}$ wird mehrmals durchlaufen.

- ferner nur noch solche $\vec{r}(t)$, die $\mathcal{C}$ „in derselben Richtung durchlaufen": sog. „orientierte Wege".

- ferner nur hinreichend oft diff'bare $\vec{r}(t)$ (vgl. Kap. 8.5)

<u>Folgerung:</u>

Jede andere Parametrisierung $\vec{y}(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ von $\mathcal{C}$

ist von der Form

$$\underline{\underline{\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))}}$$

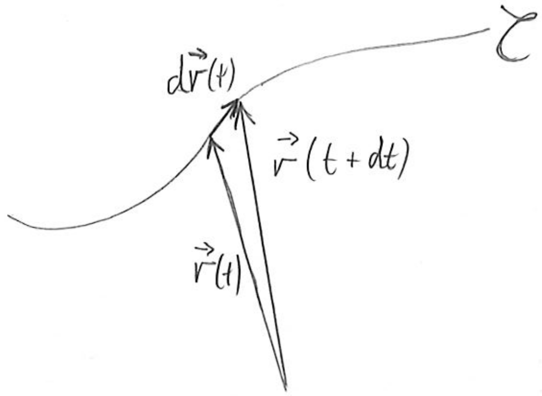
$\Leftrightarrow$ zu jedem $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ existiert genau ein $t = t(\tau)$

mit $\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t)$

$\Rightarrow$ $t(\tau_1) = t_1$, $t(\tau_2) = t_2$,

$\frac{dt(\tau)}{d\tau} \geq 0$ ($t(\tau)$ monoton wachsend)

Ableitung (vgl. Kap. 8.5)



[Bisher Δt und $\Delta\vec{r}$, jetzt dt und $d\vec{r}$: $\Leftrightarrow$ „$\Delta t \to 0$ mitgedacht"]

$\Rightarrow$ (Momentan-) Geschwindigkeit:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_k \underbrace{\dot{r}_k(t)}$$

$\Leftrightarrow$ $d\vec{r}(t) := \dot{\vec{r}}(t)\,dt$ („Differential", vgl. Kap. 13.4.)

$\simeq \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ (exakt für $dt \to 0$)

$\Rightarrow$ Richtung: tangential zur Raumkurve bei $\vec{r}(t)$

Betrag: $|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dot{r}_k^2(t)}$

Ab jetzt nur noch $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0 \;\forall\; t \in I$ betrachtet

[„$\vec{r}(t)$ steht niemals still"]

$\vec{T}(t) := \dfrac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$ heisst Tangenten- oder Tangentialvektor

$\Rightarrow$ $|\vec{T}(t)| = 1$ (Einheitsvektor)

14.2 Wegintegrale [Lit.: Weltner, Kap. 16]

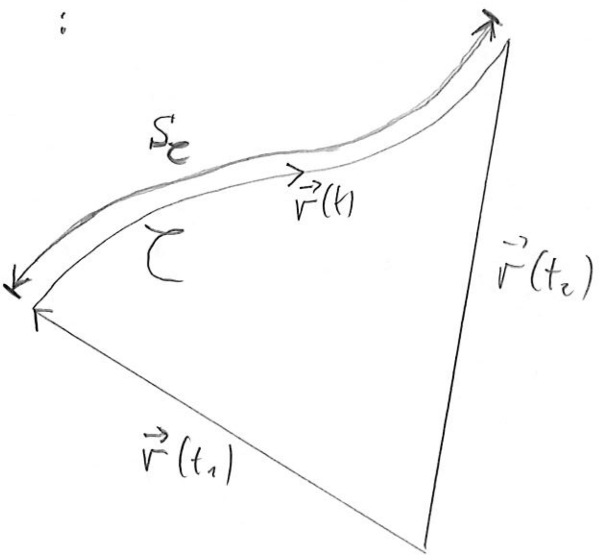
Auch Linienintegrale, Kurvenintegrale, ... genannt.

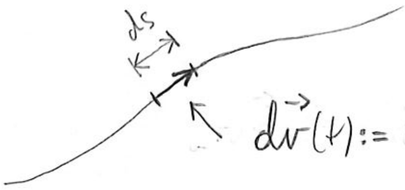
Es geht immer um gewisse „Integrale entlang Raumkurven",

aber es gibt verschiedene „Sorten":

1. Sorte :

Bogenlänge von $\mathcal{C}$:





$d\vec{r}(t) := \dot{\vec{r}}(t)\,dt \simeq \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ (vgl. S. 14.8)

$\uparrow$ exakt für $dt \to 0$

$ds := |d\vec{r}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$ $\hat{=}$ „während dt zurückgelegte (Teil-)Strecke" (exakt für $dt \to 0$)

$$\Rightarrow \quad S_\mathcal{C} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{dt\;|\dot{\vec{r}}(t)|}_{=\,ds \text{ (siehe oben)}}$$

$\hat{=}$ „Summe aller Teilstrecken" (vgl. Kap 13.4)

$\Rightarrow$ andere Schreibweise $S_\mathcal{C} =: \int_\mathcal{C} ds$

oder auch $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)|\,dt$

Für eine beliebige andere Parametrisierung

$\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t(\tau))$ von $\mathcal{C}$ folgt:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, |\dot{\vec{y}}(\tau)| = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \frac{dt(\tau)}{d\tau} \, |\dot{\vec{r}}(t(\tau))| =$$

Substitution bzw Variablentrafo von τ auf t [Rückwärts]

$$\frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) = \dot{\vec{r}}(t(\tau)) \cdot \underbrace{\frac{dt(\tau)}{d\tau}}_{\geq 0}$$ [Kettenregel]

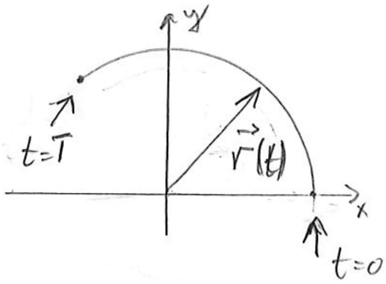
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, |\dot{\vec{r}}(t)| = S_{\mathcal{C}}$$

$\Longrightarrow$ $S_{\mathcal{C}}$ ist unabh. von der Parametrisierung von $\mathcal{C}$.

[wie man es erwarten sollte! Nur Eigenschaft von $\mathcal{C}$ alleine]

Beisp:

1.) $n=2$, $\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0,T]$



„Kreisbogen"

$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$\Rightarrow S_C = \int_0^T dt \underbrace{|\dot{\vec{r}}(t)|}_{=1} = t \Big|_0^T = T$ [wie erwartet: Bogenlänge = Bogenmass]