

RECHENMETHODEN DER PHYSIK I

WS 2023/24

Übungsblatt 4

<http://www.physik.uni-bielefeld.de/~reimann/RdP1.html>

Schriftlich abzugeben sind: 17a, 18, 19a, 20

Aufgabe 16

Betrachten Sie $f(x) := (x + y)^n$, wo $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um 0.

b) Folgern Sie daraus den sog. binomischen Lehrsatz $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$,
wo $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Binomialkoeffizienten).

Aufgabe 17

Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) e^{-\alpha x}$ für beliebige $\alpha > 0$ und beliebige Polynome $P(x)$.

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die Lösung $x, y \in \mathbb{C}$ des Gleichungssystems $ix + 3y = 1$, $2x + iy = 2i$.

Aufgabe 19

Zeigen Sie folgende Additionstheoreme für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $\sin(z_1) \cos(z_2) \pm \cos(z_1) \sin(z_2) = \sin(z_1 \pm z_2)$

Hinweis: $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

b) $\cos(z_1) \cos(z_2) \pm \sin(z_1) \sin(z_2) = \cos(z_1 \mp z_2)$

c) Folgern Sie: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 20

Definieren Sie $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$ genau so wie "im Reellen" und zeigen Sie: $\cosh(iz) = \cos(z)$, $\sinh(iz) = i \sin(z)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 21

Zeigen Sie: $(\exp(z))^* = \exp(z^*)$, $(\cos(z))^* = \cos(z^*)$, $(\sin(z))^* = \sin(z^*)$. **Hinweis:** Aufgabe 15.