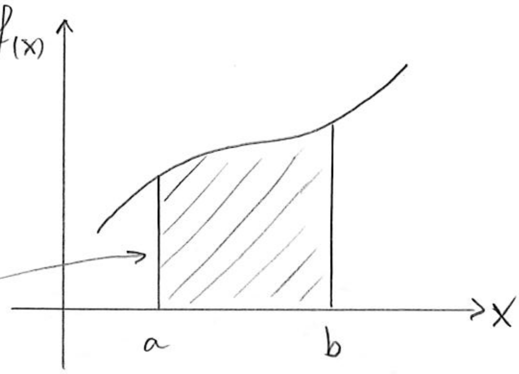
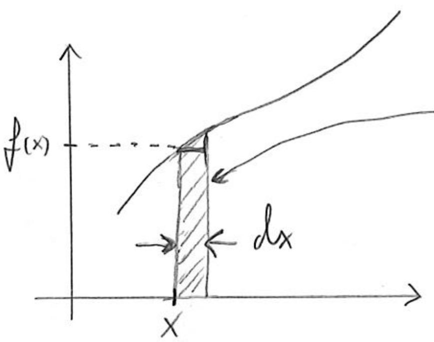
13.4 Integration im $\mathbb{R}^n$

Erinnerung (Kap. 10):

$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \;\hat{=}\;$ „Fläche"



$\Longleftrightarrow$



$dF := dx\, f(x)$ „infinitesimale Fläche"

$\simeq F(x+dx) - F(x)$ (sog. Differential)

$\uparrow$

exakt für $dx \to 0$

Es folgt:

- $\int_a^b dx\, f(x) \;\hat{=}\;$ „Summe über alle Teilintervalle, gewichtet mit $f(x)$"

- $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Analog für SF $f(\vec{x})$:

$\uparrow (x_1, \dots, x_n)$

$\int_a^b dx_k \; f(\vec{x})$:= „ganz normale Integration einer Fkt. von x_k mit festgehaltenen $x_{j \neq k}$" !

$\Rightarrow$ „gewohnte" Integrationsregeln (behandle alle $x_{j \neq k}$ als „Konstante").

Beisp:

$$f(x_1, x_2) := 3 x_1 x_2^2$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx_2 \; f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3 \Big|_{x_2 = a}^{x_2 = b} = \underbrace{x_1 (b^3 - a^3)}$$

„konstant"

nur noch Fkt. von x_1, nicht mehr von x_2 !

$\sim$

$$\Leftrightarrow \int_a^b dx_k\, f(\vec{x}) = F(\vec{x})\Big|_{x_k=a}^{x_k=b} =: g(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)$$

kein x_k!

mit $\dfrac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_k} = f(\vec{x})$

$$\Rightarrow \int_c^d dx_j \int_a^b dx_k\, f(\vec{x}) = \int_c^d dx_j\, g(x_1,\dots,x_n) \qquad (j \neq k)$$

„2-faches Integral"

usw.

Beisp:

$$f(x_1, x_2) = 3 x_1 x_2^2$$

$$\Rightarrow \int_c^d dx_1 \underbrace{\int_a^b dx_2\, f(x_1, x_2)}_{x_1 (b^3 - a^3)} = (b^3 - a^3) \underbrace{\int_c^d dx_1 \cdot x_1}_{\frac{1}{2} x_1^2 \Big|_c^d = \frac{1}{2}(d^2 - c^2)} = \frac{1}{2}(b^3 - a^3)(d^2 - c^2)$$

Jetzt:

$$\int_a^b dx_2 \underbrace{\int_c^d dx_1\, f(x_1 x_2)}_{\frac{3}{2} x_1^2 x_2^2 \Big|_{x_1 = c}^{x_1 = d} = \frac{3}{2}(d^2 - c^2) \cdot x_2^2} = \int_a^b dx_2\, \frac{3}{2}(d^2 - c^2) x_2^2$$

$$= \frac{3}{2}(d^2 - c^2) \underbrace{\int_a^b dx_2\, x_2^2}_{\frac{1}{3} x_2^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)} = \frac{1}{2}(d^2 - c^2)(b^3 - a^3) \quad \text{dasselbe!}$$

Ganz allg. gilt:

$$\int_{a_j}^{b_j} dx_j \int_{a_k}^{b_k} dx_k \, f(\vec{x}) = \int_{a_k}^{b_k} dx_k \int_{a_j}^{b_j} dx_j \, f(\vec{x})$$

für bel. $j, k \in \{1, \dots, n\}$ (falls alle Integrale existieren und $j \neq k$):

Satz von Fubini (Gegenstück zum Satz von Schwarz).

Bew: Analysis-Vorl.

Analog für $3, 4, \dots, n$-fache Integrale.

$\sim$

Betrachte $\underbrace{\frac{d}{dx_1} \int_a^b dx_2 \, f(x_1, x_2)}_{\text{nur noch Fkt. von } x_1 \,!} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^b dx_2 \, f(x_1+h, x_2) - \int_a^b dx_2 \, f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= \int_a^b dx_2 \, \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}}_{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}$$

Analog: $\frac{\partial}{\partial x_k} \int_a^b dx_j \, f(\vec{x}) = \int_a^b dx_j \, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \qquad \forall j \neq k$

$\sim$

Alternative Schreibweisen für n-fache Integrale:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} dx_n \, f(\vec{x}) =$$

$$= \int_I dx_1 dx_2 \ldots dx_n \, f(\vec{x}) = \underline{\underline{\int_I d^n x \, f(\vec{x})}} \quad \text{usw.}$$

$$\underbrace{I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]} \subset \mathbb{R}^n \quad \text{„Integrationsbereich"}$$

↑ „Teilmenge"

sog. „Kartesisches Produkt von n Intervallen" $\hat{=}$ „n-dim (Hyper-)Quader"

Verallg. für bel. Integrationsbereiche $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{B}} d^n x \, f(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \chi_{\mathbb{B}}(\vec{x}) \, f(\vec{x})$$

$$\chi_{\mathbb{B}}(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \vec{x} \in \mathbb{B} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ sog. „charakteristische Fkt (von $\mathbb{B}$)"

Andere Möglichkeit: siehe Beisp. (ii).

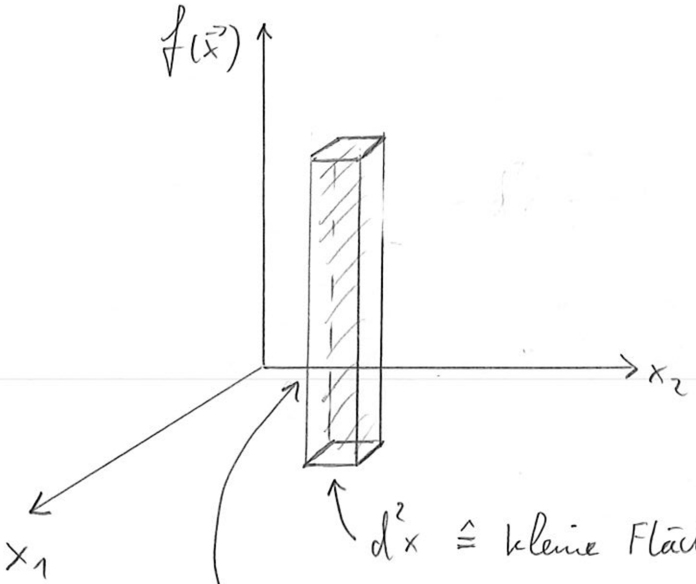
Interpretation:

$d^n x \, f(\vec{x}) \hat{=}$ „infinitesimales n-dim. Volumen, gewichtet mit $f(\vec{x})$"

$\int_{\mathbb{B}} d^n x \, f(\vec{x}) \hat{=}$ „Summe über alle Teilbeiträge"

Speziell

1.) $n=2$:



$d^2x \;\hat{=}$ kleine Fläche in 2 Dim.

$d^2x\, f(\vec{x}) \;\hat{=}$ kleines Volumen in 3 Dim.

(exakt für $dx_k \to 0$)

$\Rightarrow \int_B d^2x\, f(\vec{x}) \;\hat{=}$ „Summe aller Teilvolumina über der Grundfläche $\mathbb{B}$"

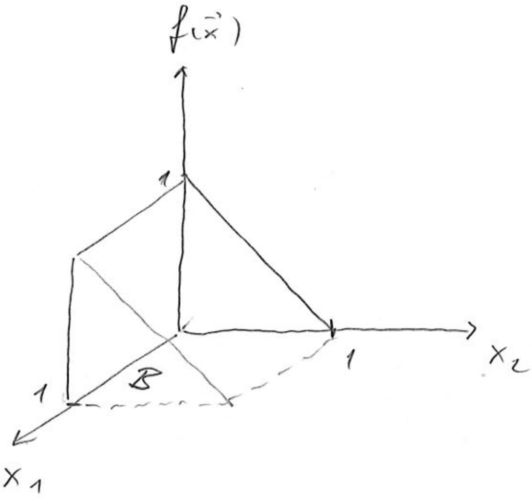
alternativ: dA (infinit. Fläche)

$$= \iint_{\mathbb{B}} dA\, f(\vec{x})$$

Beisp :

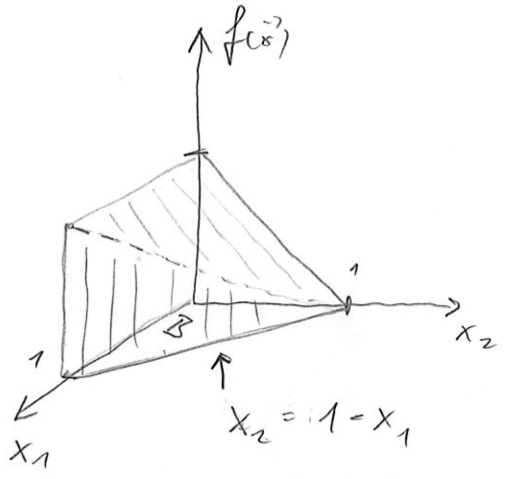
(i) $B = [0,1] \times [0,1]$

$f(x_1, x_2) = 1 - x_2$



$$Vol = \int_0^1 dx_1 \underbrace{\int_0^1 dx_2 \; (1-x_2)}_{x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \big|_0^1 \; = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}} = \underbrace{\int_0^1 dx_1 \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}x_1 \big|_0^1 = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

(ii) $B \mathrel{\hat{=}}$ Dreieck



$$\mathrm{Vol} = \int_0^1 dx_1 \underbrace{\int_0^{1-x_1} dx_2 \, (1-x_2)}$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \Big|_0^{1-x_1} = 1 - x_1 - \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{(1-x_1)^2}_{1-2x_1+x_1^2}}_{-\frac{1}{2}+x_1-\frac{1}{2}x_1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2$$

$$= \int_0^1 dx_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2\right) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_1^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

2.) $n=3$:

$$\underbrace{d^3x\ \varrho(\vec{x})}_{\text{„Dichte" (Masse/Vol.)}} \ \hat{=}\ \text{„kleine Masse im Volumenelement } d^3x\text{"}$$

(exakt für $dx_k \to 0$)

$$\Rightarrow \int_B d^3x\ \varrho(\vec{x}) \ \hat{=}\ \text{„Gesamtmasse im Volumen } B\text{"}$$

$\downarrow$

alternativ $\int_B dV \ldots$ oder $\iiint_B dV \ldots$

[keine geom. Veranschaulichung mögl.!]

Analog für VF $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\int_a^b dx_k \, \vec{f}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \int_a^b dx_k \, f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \int_a^b dx_k \, f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \int_a^b dx_k \, f_j(\vec{x}) \cdot \vec{e}_j$$

(„komponentenweise")

u.s.w [Mehrfachintegrale]