13 Funktionen mehrerer Variablen

Einfachster Fall:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (\text{bzw. Teilmengen von } \mathbb{R}^n \text{ und } \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ oder } (x_1, \dots, x_n) \text{ oder } \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$$

Name: **Skalarfeld (SF).**

Beisp: $n=3$, $f(\vec{x}) = e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

(z.B. Temperatur am Ort $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$;
statt (x_1, x_2, x_3) oft auch (x, y, z))

Verallg.:

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, .., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \text{ oder } \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x})\, \vec{e}_k$$

Name: <u>Vektorfeld</u> (VF)

Beisp: Kraftfeld $\vec{F}(\underbrace{x, y, z, t}_{= \vec{x} \in \mathbb{R}^{n=4}}) \in \mathbb{R}^{m=3}$ (Ort <u>und</u> Zeit!)

Ferner könnte auch noch $f \in \mathbb{C}$ bzw. $\vec{f} \in \mathbb{C}^m$ sein:

nicht schwierig aber hier weggelassen.

Ebenso ist $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ selten in der Physik.

13.1 Partielle Ableitungen

Betrachte SF $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Wählt man $x_2, \dots, x_n$ beliebig aber fest, wird $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine „ganz normale Fkt." von x_1 allein. [$x_2 \dots x_n$ „Zuschauer"]

Insbes. nennt man dann

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

die partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_1.

D.h. „∂" statt „d" deutet an, dass man $x_2, \dots, x_n$ festhält während man nach x_1 ableitet, nichts weiter!

$\Rightarrow$ alle „gewohnten" Ableitungsregeln sofort übertragbar

(indem man $x_2, \ldots, x_n$ als „Konstanten" behandelt).

Beisp. von oben:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3\right)}{\partial x_1} \overset{\substack{x_2, x_3 \text{ „Konstanten"} \\ \downarrow}}{=} -e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3$$

Analog für <u>höhere Ableitungen</u>:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = +e^{-x_1} + 6x_1 x_2^2 x_3$$

$$\frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_1^3} = -e^{-x_1} + 6x_2^2 x_3$$

usw

Analog für $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, z. B. [Präsenzübung]

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2\, x_1^3\, x_2\, x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2} = 0$$

usw.

Alternative Schreibweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}),\ \partial_{x_k} f(\vec{x}),\ \partial_k f(\vec{x}),\ D_k f(\vec{x}),\ \frac{\partial f}{\partial x_k},\ f_{x_k},\ \dots$$

bzw mit $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_k) - f(\vec{x})}{h}$$

Bem: $\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} = \frac{d f(x_1)}{d x_1}$ $(n=1)$

Gemischte Ableitungen, z.B.

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} := \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1^3 x_2 x_3\right) = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3\right) = 6x_1^2 x_2 x_3$$

Satz von Schwarz:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_j}}$$

für beliebige $j, k \in \{1, \dots, n\}$, falls beide gemischten Ableitungen bei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ stetig. [also prakt. immer!]

Bew: Analysis-Vorl.

~

Verallg. für VF

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x})\,\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{x})\,\vec{e}_j$$

wie üblich

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_k} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}\right) \vec{e}_j$$

(„komponentenweise").

u.s.w [höhere Abl.]

Beisp: [Präsenzübung]

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} \sin(x_1) + x_3 x_2 \\ e^{x_1 \cdot x_3} \\ x_2^3 \end{pmatrix}$$

(z.B. Kraftfeld)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ x_3 e^{x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_3 \partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte vektorwertige Fkt. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\,\vec{e}_k$

und SF $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(\vec{x}(t))$ ist Fkt. von $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}(t))}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k(t)}{dt}}}$$

sog. „totale Ableitung"   „verallg. Kettenregel".

Bew: Analysis-Vorl. oder S. 9'.

Analog für Vektorfeld $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ („komponentenweise")

<u>Beweisidee für $n=2$:</u> [in der Vorl. weggelassen]

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}(t+h)) - f(\vec{x}(t))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big[f(x_1(t+h), x_2(t+h)) - f(x_1(t), x_2(t))$$

$$\underbrace{+ f(x_1(t+h), x_2(t)) - f(x_1(t+h), x_2(t))}_{=0 \text{ [„Trick"]}} \Big]$$

$$= A + B$$

$$A := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big[\underbrace{f(x_1(t+h), x_2(t)) - f(x_1(t), x_2(t))}_{f_1(x_1(t+h)) - f_1(x_1(t))} \Big] \qquad \Bigg| \begin{array}{l} a := x_2(t) \text{ bel. aber fest} \\ f_1(x_1) := f(x_1, a) \end{array}$$

$$= \frac{d}{dt} f_1(x_1(t)) = \underbrace{f_1'(x_1(t))}_{\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1(t), x_2(t))} \cdot \frac{d}{dx} x_1(t) \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$B := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \Big[f(\underbrace{x_1(t+h)}_{\downarrow\, x_1(t) =: b}, x_2(t+h)) - f(\underbrace{x_1(t+h)}_{\downarrow\, b}, x_2(t)) \Big) = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1(t), x_2(t)) \frac{d}{dx} x_2(t)$$

q.e.d.

13.2 Taylor-Reihen

Idee für 1 Variable (Kap. 9):

$$\underbrace{f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2}_{\text{gute Approx. für } f \text{ in der Nähe von } x \text{ (kleine } \Delta x\text{)}} + \underbrace{\ldots}_{\text{unendl. Reihe oder Restglied}}$$

Analog für SF $f(\vec{x})$ mit $\Delta\vec{x} := (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$:

$$f(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j \Delta x_k + \ldots$$

gute Approx von f in der Nähe von $\vec{x}$

[ziemlich klar; braucht man selten!]

Bew: Analysis-Vorl. oder S. 3.10'

Beweisidee für $n=2$: [in der Vorl. weggelassen]

$b := x_2 + \Delta x_2$ bel. aber fest, $f_1(x_1) := f(x_1, b)$

$$\Rightarrow f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) = f_1(x_1+\Delta x_1) = f_1(x_1) + f_1'(x_1)\Delta x_1 + \frac{f_1''(x_1)}{2!}\Delta x_1^2 + \dots$$

$$= f(x_1, x_2+\Delta x_2) + \frac{\partial f(x_1,x_2+\Delta x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial^2 f(x_1,x_2+\Delta x_2)}{\partial x_2^2}\Delta x_1^2 + \dots$$

$a := x_1$ bel. aber fest, $f_2(x_2) := f(a, x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2+\Delta x_2) = f_2(x_2+\Delta x_2) = f_2(x_2) + f_2'(x_2)\Delta x_2 + \frac{f_2''(x_2)}{2!}\Delta x_2^2 + \dots$$

$$= f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\Delta x_2^2 + \dots$$

$$g_2(x_2) := \frac{\partial f(a,x_2)}{\partial x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x_1, x_2+\Delta x_2)}{\partial x_1} = g_2(x_2+\Delta x_2) = g_2(x_2) + g_2'(x_2)\Delta x_2 + \dots$$

$$= \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)\Delta x_2 + \dots$$

$$h_2(x_2) := \frac{\partial^2 f(a, x_2)}{\partial x_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\partial x_1^2} = h_2(x_2 + \Delta x_2) = h_2(x_2) + \ldots = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \ldots$$

Insges.:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \Delta x^2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \underbrace{\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} \Delta x_2 \Big) \Delta x_1}_{(*)} \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + \ldots$$

$$(*) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} \Delta x_2 \Delta x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2$$

q.e.d.

13.3 Partielle DGl'en

Einfachstes Beisp:

Finde Fkt $f(\underbrace{x,t}_{\text{statt } x_1, x_2})$ mit

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{const.} \in \mathbb{R}}}{c} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$$

Beh: $f(x,t) = g(x-ct)$ ist Lösung für beliebige (diff'bare)

Fkt. $g(x)$.

Bew: $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g(x-ct) \overset{\substack{x \text{ „konst.“; Kettenregel} \\ \downarrow}}{=} g'(x-ct) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)}_{-c}$,

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} g(x-ct) = g'(x-ct) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-ct)}_{=1}$ q.e.d.

D.h. in der „allg. Lösung“ ist nicht mehr nur eine (oder mehrere)

Konstanten „frei wählbar“, sondern eine ganze Fkt!

13.12

z.B. kann man $f(x,t)$ für $t=0$ „vorgeben":

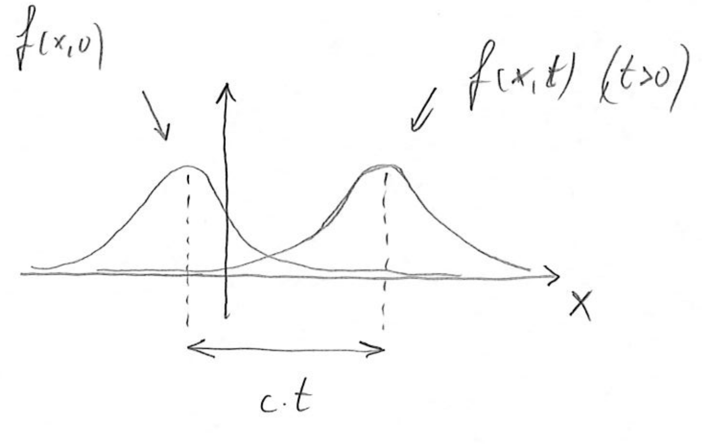
[DGl. sagt nur, wie es dann „weitergeht",
wie es „losgeht" muss man selber sagen!]

$$f(x,0) \overset{!}{=} f_0(x) \qquad \forall x$$

$\;\;\shortparallel$

$g(x)$ [d.h. $g(x)$ jetzt eindeutig festgelegt]

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x,t) = f_0(x-ct)}} \qquad \forall x,t$$



d.h. $\underline{\underline{c \mathrel{\widehat{=}} \text{„Ausbreitungsgeschw."}}}$ (der „Struktur"/„Info" von $f(x,0)$)

Im Allg. sind partielle DGl'en noch „schwieriger" zu lösen als

gewöhnliche → Theorie-Vorlesungen.