Generelles Prinzip :

In der Physik sind oft nur reelle Lösungen sinnvoll. (P)

Aber : „Weg durchs Komplexe" vereinfacht oft die

Rechnungen (nur für lin. DGl'en!)

$\sim$

<u>Beisp:</u> $n=2$, $x(t)$ statt $y(x)$:

$$\underline{\underline{a_2\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_0x(t)=0}}\quad,\quad a_k\ \underline{\underline{\in\mathbb{R}}}\ ,\ a_2\neq 0$$

(z.B. „harm. Oszillator", Masse a_2, Dämpfung a_1, Federkonst. a_0)

Ansatz: $x(t)=e^{zt}$ $\Rightarrow$ $a_2z^2+a_1z+a_0=0$

$$\Rightarrow z_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2a_2}\quad,\quad D:=a_1^2-4a_2a_0\ \text{(Diskriminante)}$$

1.) $\underline{D>0}$ $\Rightarrow$ $z_{1,2}\in\mathbb{R}$, allg. Lösung

$$\underline{\underline{x(t)=c_1e^{z_1t}+c_2e^{z_2t}}}\quad,\ c_{1,2}\in\mathbb{C}\ \text{bel.}$$

(P) $\Rightarrow$ nur $c_{1,2}\in\mathbb{R}$ erlaubt.

2.) $\underline{D=0}$ $\Rightarrow$ $z_1=z_2\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ eine Lsg. ist e^{z_1t}.

Beh: $t\cdot e^{z_1t}$ ist weitere Lsg.

Bew: einsetzen, Details selbst! $\Rightarrow$ allg. Lsg.

$$\underline{\underline{x(t)=(c_1+c_2t)\,e^{z_1t}}}\quad,\ c_{1,2}\in\mathbb{R}\ \text{bel.}$$

$\uparrow$
(P)

3.) $\underline{D<0}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{D} = i\underbrace{\sqrt{-D}}_{=|D|^{1/2}\in\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{z_{1,2} = \gamma \pm i\omega}}$, $\gamma := -\frac{a_1}{2a_2}$, $\omega := \frac{|D|^{1/2}}{2a_2}$

$\Rightarrow$ $e^{z_{1,2}t} = e^{\gamma t}\underbrace{e^{\pm i\omega t}}_{\cos(\pm\omega t)+i\sin(\pm\omega t)} = e^{\gamma t}\cos(\omega t) \pm i\, e^{\gamma t}\sin(\omega t)$

Typisches Argument: da $a_k \in \mathbb{R}$, muss auch

Real- und Imaginärteil jeweils DGl. lösen! (Bew: selbst!)

$\Rightarrow$ zwei rein reelle Lsg sind $e^{\gamma t}\cos(\omega t)$ und $e^{\gamma t}\sin(\omega t)$

$\Rightarrow$ allg. Lsg. (vgl. (P))

$\underline{\underline{x(t) = e^{\gamma t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)}}$, $c_{1,2}\in\mathbb{R}$ bel.

$\underline{\underline{= e^{\gamma t}\, C\sin(\omega t+\varphi)}}$, $C\in\mathbb{R}$, $\varphi\in[0,2\pi)$ bel.

(Bew: selbst!)

Speziell: $a_1 = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ („ungedämpft“).

In allen Fällen 1-3:

<u>Anfangsbed.</u> der Form $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$

(t_0, x_0, v_0 „vorgegeben") legen $C_{1,2}$ bzw. C, φ und somit

<u>$x(t)$ eindeutig</u> fest.

Weitere Beisp: Übungsblatt 10.

12.2.2 Inhomogene lineare DGl'en mit konstanten Koeffizienten

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k}}_{\text{wie vorhin}} = \underbrace{g(x)}_{\text{„Inhomogenität"}}$$

Wie in 12.1.1: allg. Lösung ist von der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$ allg. Lösung der homogenen DGl.: erledigt.

$y_p(x)$ partikuläre (= irgend eine) Lsg. der inhom. DGl.

„Methoden" (TX):

a) Raten.

Beisp: $y''(x) + 2y(x) = x$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x$ ist eine Lösung.

b) Falls $g(x)$ von der Form

$$\underline{\underline{g(x) = \sum_{k=0}^{K} b_k x^k}}$$ (Polynom vom Grad K, $b_K \neq 0$)

dann „funktioniert" der Ansatz

$$\underline{\underline{y_p(x) = \sum_{k=0}^{K} c_k x^k}}.$$

Grund: $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_p(x)}{dx^k}$ ist dann ebenfalls Polyn. vom Grad K.

(Koeffizientenvergl. $\Rightarrow$ $K+1$ lin. Gl. für $K+1$ Unbekannte c_k)

c) Falls $g(x)$ von der Form

$$\underline{\underline{g(x) = b\,e^{zx}}} \quad (b, z \in \mathbb{C})$$

dann „funktioniert" der Ansatz

$$\underline{\underline{y_p(x) = c\,e^{zx}}}$$

Grund: $$\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\frac{d y_p(x)}{dx^k}}_{c z^k e^{zx}} = e^{zx}\, c \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}_{=:P(z)} \overset{!}{=} g(x) = b\,e^{zx}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{b}{P(z)} \quad \underline{\underline{\text{falls}}} \quad P(z) \neq 0.$$

Andernfalls: Ansatz $\underline{\underline{y_p(x) = c\,x^j e^{zx}}}$ mit

j = Vielfachheit der Nullstelle $P(z) = 0$

<u>Beisp. von oben:</u>

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = g(t) = b e^{zt}$$

$$b = B e^{i\varphi} \quad , \quad z := i\Omega \quad \left(B, \varphi, \Omega \in \mathbb{R} \right)$$

Ansatz: $x_p(t) = c\, e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad a_2 c \underbrace{(i\Omega)^2}_{-\Omega^2} e^{i\Omega t} + a_1 c\, i\Omega\, e^{i\Omega t} + a_0 e^{i\Omega t} \overset{!}{=} B e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow \quad c\, Q = B e^{i\varphi} , \quad Q := -a_2 \Omega^2 + a_1 i \Omega + a_0 = |Q| e^{i \arg(Q)}$$

Ann: $Q \neq 0 \Leftrightarrow a_2 \Omega^2 \neq a_0$ oder $a_1 \Omega \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{B}{|Q|} e^{i(\varphi - \arg(Q))}$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{B}{|Q|} \, e^{i(\Omega t + \varphi - \arg(Q))}$$

Wie oben (vgl. (P)): da $a_k \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\tilde{x}_p(t) := \mathrm{Re}(x_p(t)) = \frac{B}{|Q|} \cos\left(\Omega t + \varphi - \arg(Q)\right)$$

eine partikuläre Lösung der „rein reellen DGl" mit

Inhomogenität $\quad \tilde{g}(t) := \mathrm{Re}\,(\underbrace{g(t)}_{e^{i(\Omega t + \varphi)}}) = \underset{\uparrow \atop \text{Ampl.}}{B} \cos(\underset{\uparrow \atop \text{Kreisfreq.}}{\Omega} t + \underset{\uparrow \atop \text{Phase}}{\varphi})$

d) Falls $y_p^{(m)}(x)$ partik. Lösung zu $g_m(x)$, $m=1,\dots,M$,

dann ist

$$y_p(x) := \sum_{m=1}^{M} c_m \, y_p^{(m)}(x)$$

partik. Lsg zu

$$g(x) = \sum_{m=1}^{M} c_m \, g_m(x)$$

für bel. $c_1,\dots,c_M \in \mathbb{C}$.

Grund: Linearität der DGl.

Beisp: wie in c), aber mit $\tilde{g}(t) = \sum_{m=1}^{M} B_m \cos(\Omega_m t + \varphi_m)$

Später: Für $M \to \infty$ kann man (prakt.) jedes $\tilde{g}(t)$ so schreiben!

12.2.3 Eulersche DGl'en

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = g(x)$$

Grundidee für $n=2$, $x>0$ (TX!):

$T(x) := \ln x$

$X(t) := e^t$

$\Rightarrow T(X(t)) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(T(x)) = x \quad \forall x > 0$

$h(t) := y(X(t)) \quad \Rightarrow \quad h(T(x)) = y(X(T(x))) = y(x)$

$\tilde{g}(t) := g(X(t))$

DGl. gilt für alle $x>0 \iff$ es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$a_0\, y(X(t)) + a_1\, X(t)\, y'(X(t)) + a_2\, X^2(t)\, y''(X(t)) = g(X(t))$$

$$\dot h(t) = \frac{d}{dt}\, y(x(t)) = y'(x(t)) \cdot \underbrace{\dot x(t)}_{= e^t = x(t)}$$

$$\ddot h(t) = \frac{d}{dt}\left(y'(x(t)) \cdot x(t)\right) = y''(x(t))\, \underbrace{\dot x(t)}_{x(t)}\, x(t) + \underbrace{y'(x(t))\, \dot x(t)}_{\dot h(t)}$$

$$\Rightarrow \quad y''(x(t))\, x^2(t) = \ddot h(t) - \dot h(t)$$

$$\Rightarrow \quad a_0\, h(t) + \underbrace{a_1\, \dot h(t) + a_2\left(\ddot h(t) - \dot h(t)\right)}_{(a_1 - a_2)\,\dot h(t) + a_2\, \ddot h(t)} = \tilde g(t)$$

$\Leftrightarrow$ Kap. 12.2.2 $\Rightarrow h(t) = \ldots \Rightarrow y(x) = h(T(x)) = h(\ln x) = \ldots$

Analog für $n > 2$ und $x < 0$.

Ansatz: $T(x) := \ln(-x)$ usw.

Beisp: Ü 49