12.1.2 Nichtlineare DGl'en 1. Ordn.

Hier nur 2 besonders wichtige Beisp:

1.) $\underline{\underline{y'(x) = a(x)\, b(y(x))}}$ („separable DGl.")

Lösungsmethode (TX!):

(i) Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)\, dx$$

(ii) Integrieren:

Finde $B(y)$ mit $B'(y) = \frac{1}{b(y)}$

und $A(x)$ mit $A'(x) = a(x)$

(iii) $\Rightarrow$ jede Fkt $y(x)$, die

$$\underline{\underline{B(y(x)) = A(x) + c}} \qquad \text{(„implizite Lösung")}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ erfüllt, ist eine Lösung.

Bew: $$\frac{d}{dx} B(y(x)) = \underbrace{B'(y(x))}_{1/b(y(x))} \cdot y'(x) = \underbrace{A'(x)}_{a(x)} \qquad [\hat{=} \text{ Subst. bzw. Kettenregel}]$$

(iv) Ev. auflösen (nicht unbedingt nötig!)

$$\underline{\underline{y(x) = B^{-1}\left(A(x) + c\right)}} \qquad \text{(„explizite Lösung")}.$$

Bem: Im Prinzip so __allg. Lösung__ der DGl. gefunden, praktisch kann Bestimmung von $B(y)$, $A(x)$ (und $B^{-1}(y)$) schwierig sein.

$\underline{\underline{\text{Anfangsbed. } y(x_0) = y_0}} \Rightarrow c \overset{!}{=} B(y_0) - A(x_0)$

Beisp: Ü 44, 45.

2.) $$\underline{\underline{y'(x) = \alpha(x)\, y(x) + \beta(x)\, (y(x))^{\gamma}}}$$ (Bernoulli-Gl.)

mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0,1$ ($\gamma = 0,1$ schon erledigt!).

Ansatz (TX): $z(x) := (y(x))^{1-\gamma}$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = (1-\gamma)\,(y(x))^{-\gamma} \cdot \underbrace{y'(x)}_{\alpha y + \beta y^{\gamma}}$$

$$= (1-\gamma)\left[\alpha(x)\,\underbrace{(y(x))^{1-\gamma}}_{z(x)} + \beta(x)\right]$$

$\Leftrightarrow$ lineare DGl. für $z(x)$, in 12.1.1 gelöst.

Beisp:

$$y'(x) = \frac{1}{x}\, y(x) + x\, y^2(x) \qquad (\gamma = 2)$$

Ansatz: $\quad z(x) := y(x)^{1-\gamma} = \frac{1}{y(x)}$

$$\Rightarrow \quad z'(x) = \underbrace{(1-\gamma)}_{-1}\left[\frac{1}{x} z(x) + x\right] = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=:a(x)} z(x) \underbrace{- x}_{=:b(x)}$$

$$\Rightarrow \quad A(x) := \int_{x_0}^{x} dx'\, \underbrace{a(x')}_{-\frac{1}{x'}} = -\ln x' \Big|_{x_0}^{x} = -\ln x + \ln x_0 = \ln(x_0/x)$$

$$\Rightarrow \text{(Kap. 12.1.1)} \quad z(x) = C\, \underbrace{e^{A(x)}}_{e^{\ln(x_0/x)} = \frac{x_0}{x}} + \int_{x_0}^{x} dx'\, \underbrace{b(x')}_{-x'}\, \underbrace{e^{A(x) - A(x')}}_{\frac{e^{A(x)}}{e^{A(x')}} = \frac{x_0}{x} \cdot \frac{x'}{x_0} = \frac{x'}{x}}$$

$$= C \cdot \frac{x_0}{x} - \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \cdot (x')^2}_{\frac{1}{3}(x')^3 \big|_{x_0}^{x} = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3)}$$

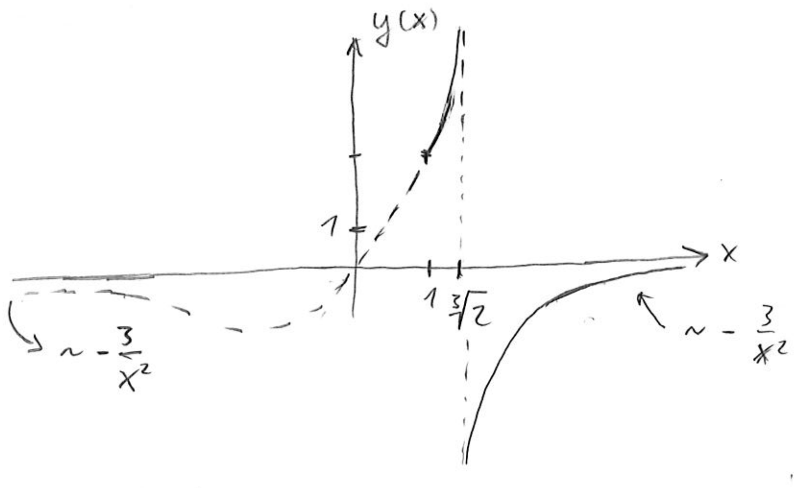
Anfangsbed: $\quad z(x_0) = \frac{1}{y(x_0)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{y_0} \quad \Rightarrow \quad z(x_0) = C \cdot \frac{x_0}{x_0} \stackrel{!}{=} \frac{1}{y_0}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{x}{\frac{x_0}{y_0} + \frac{x_0^3 - x^3}{3}},$$

existiert, solange Nenner $\neq 0$:

z.B. $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ $\Rightarrow$

$$y(x) = \frac{3x}{2 - x^3}$$



Pol bei $x = \sqrt[3]{2}$,

sowas kann „passieren"!

Weiteres Beisp.: Ü 47 (3)

12.2 Gewöhnliche DGl'en höherer Ordnung

Allgemeinste Form einer DGl. n-ter Ordn.

$$f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) = 0$$

- wirklich „lösen" kann man nur wenige!
- „allg. Lösung" enthält in der Regel n „unbestimmte" Konstanten $c_1, \ldots, c_n$.
- „Anfangswertproblem": n Zusatzbedingungen der Form

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \frac{d^{n-1} y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_{n-1}$$

$\Leftrightarrow$ n Gl. für n „Unbekannte" $c_1, \ldots, c_n$.

- „Randwertproblem": n Zusatzbedingungen an verschieden „Orten", z. B. $y(x_k) = y_k$, $k=1,\dots,n$

- Existenz und Eindeutigkeit entsprechender Lösungen $y(x)$: allgem. mathem. Sätze bekannt; für „physikalisch sinnvolle Fälle" meist unproblematisch.

12.2.1 Explizite DGL'en n-ter Ordnung

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = g\left(x, y(x), y'(x), \ldots, \frac{d^{n-1} y(x)}{dy^{n-1}}\right) \qquad (*)$$

$\uparrow$

„explizit"

Definiere : $y_1(x) := y(x)$

$$y_2(x) := y_1'(x) = y'(x)$$

$$y_3(x) := y_2'(x) = y''(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) := y_{n-1}'(x) = \frac{d^{n-1} y(x)}{dy^{n-1}}$$

$$\Rightarrow y_n'(x) = g(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

$$y_{n-1}'(x) = y_n(x)$$

$$\vdots$$

$$y_1'(x) = y_2(x)$$

Fazit : $(*)$ äquivalent zu n DGL'en 1. Ordnung . Fortsetzung: 12.3

12.2.2 Homogene lineare DGl'en mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = 0$$

„homogen"

„linear" (in y)

„konst. Koeff." (im Allg. $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$)

Wichtigste Eigenschaft:

Falls $y_1(x), y_2(x)$ Lösungen, dann auch $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

$\forall\, c_{1,2} \in \mathbb{C}$ (Linearität).

Bew: selbst!

<u>Lösungsansatz</u> (TX!): $\underline{\underline{y(x) = e^{z \cdot x}}}$, $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad y'(x) = z\, e^{zx}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^k y(x)}{dx^k} = z^k e^{zx}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(x)}{dx^k} = \underbrace{e^{zx}}_{\neq 0 \ \forall z,x} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{n=0}^{n} a_k z^k = 0}}$$

$\Leftrightarrow$ Finde Nullstellen (NS) des „<u>charakteristischen Polynoms</u>"

$$\underline{\underline{P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}} \qquad (a_n \neq 0)$$

Fundamentalsatz der Algebra: es gibt n Zahlen $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = a_n (z-z_1)(x-z_2)\cdots(z-z_n)$$

Bew: Mathematikvorl.

$\Rightarrow \quad P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = z_k \,, \; k \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow \quad y_k(x) := e^{z_k x}$ sind Lösungen („Fundamentalsystem")

$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, e^{z_k x}$ ist allg. Lösung ($c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ bel.)

n Anfangs- bzw. Randbedingungen $\Rightarrow$ n lineare Gleichungen für $c_1,\dots,c_n$ $\Rightarrow$ in der Regel eindeutige Lösung.

<u>Ausnahmen:</u> Wenn zwei (oder mehr) NS z_k zusammenfallen $\Rightarrow$ nur noch $z_1, \dots, z_{n'}$ mit $n' < n$ paarweise verschieden,

analog für Lösungen $y_k(x) = e^{z_k x}$ und $y(x) = \sum_{k=1}^{n'} c_k e^{z_k x}$

$\Rightarrow$ n Gl. für $n' < n$ Unbekannte $c_1, \dots, c_{n'}$

$\Rightarrow$ im Allg. keine Lösung!

<u>Ausweg:</u> neben $e^{z_k x}$ sind dann auch

$$x e^{z_k x}, \quad x^2 e^{z_k x}, \quad \dots, \quad x^j e^{z_k x}$$

($j+1 \hat{=}$ Vielfachheit der NS z_k) weitere „unabhängige" Lösungen.

Bew: lin. Algebra

$\Rightarrow$ insges. wieder n „unabh." Lösungen usw wie vorher.

$\sim$