11.5 Vektorwertige Integrale

Sei $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\,\vec{e}_k$ vektorwertige Fkt.

(vgl. Kap. 4 und 8.5).

Def.: (i) $\vec{F}(t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(t)\,\vec{e}_k$ heisst Stammfkt. von $\vec{f}(t)$, falls

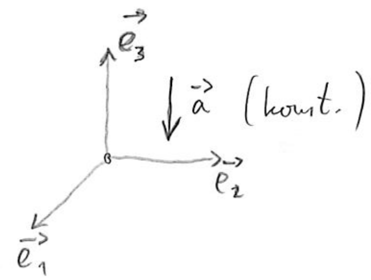
$$\frac{d}{dt}\vec{F}(t) = \vec{f}(t)$$

$\Leftrightarrow \quad \dot{F}_k(t) = f_k(t) \quad \forall\, k = 1,\dots,n$ („komponentenweise").

(ii) $\int_a^b dt\, \vec{f}(t) := \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$.

Beisp.:

$$\vec{a}(t) = -g\vec{e}_3 \quad , \quad g \simeq 9{,}81\ m/s^2 \quad \text{(Erdbeschl.)}$$



$\Rightarrow$ Stammfkt. $\vec{v}(t) = -gt\,\vec{e}_3$ (Geschw.), denn $\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t)$ ✓

$$\Rightarrow \int_0^t dt'\ \vec{a}(t') = \underbrace{\vec{v}(t')\Big|_0^t}_{\vec{v}(t)-\vec{v}(0)} = -gt\vec{e}_3 + g\cdot 0\cdot\vec{e}_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(0) - gt\,\vec{e}_3$$

Stammfkt. $\vec{x}(t) = \vec{v}(0)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_3$ (Ort), denn $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{v}(t)$ ✓

$$\Rightarrow \int_0^t dt'\ \vec{v}(t') = \underbrace{\vec{x}(t')\Big|_0^t}_{\vec{x}(t)-\vec{x}(0)} = \vec{v}(0)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_3 - 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_3}}$$

„Flugbahn wenn $\vec{x}(0)$ & $\vec{v}(0)$ gegeben"

12 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung (DGl.) ist eine Relation zwischen einer Fkt. und ihren Ableitungen.

Beisp.: 1-dim Teilchenbewegung $x(t)$ im Kraftfeld $F(x,t)$:

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t),t) \qquad \text{(Newton)}$$

Ziel: bestimme Lösung $x(t)$.

- DGl beschreibt „lokales"/„differentielles" Verhalten (infinit. Änderungen)
- Lösung beschreibt „globales"/„integrales" Verhalten (gesamte Fkt. $x(t)$).

$$\text{DGl} \;\underset{\text{schwierig („integrieren")}}{\overset{\text{einfach („differenzieren")}}{\leftrightarrows}}\; \text{Lösung}$$

$\uparrow$ „Grundgesetze der Physik" $\qquad\qquad$ $\uparrow$ exp. beobachtbare Voraussagen

- Methoden: keine echte „Systematik", eher „Sammelsurium".

  Hier nur kleine Auswahl.

  [So ähnlich wie „Integrationsmethoden", nur schlimmer!]

Mathem. („Theorie"): existiert Lösung? ist sie eindeutig?

Physik („Praxis"): fast nie ein Problem!

⇒ Wichtigste „Technik": keine strenge/saubere „Herleitung" der Lösung,

sondern: Raten, Ansatz, munteres Drauflosrechnen [ohne sich um „Details" zu kümmern], obskure Argumente, ...

Ab jetzt „TX" genannt. [Bessere Vorschläge?]

Rechtfertigung: „Lösung" am Ende einfach kontrollierbar.

[nämlich durch „Einsetzen". Wenn richtig, ist alles andere „egal"!]

12.1 Gewöhnliche DGl'en 1. Ordnung

Das sind DGl'en der Form

$$\underline{\underline{y'(x) = f(x, y(x))}}$$

1. Ordn. $\Leftrightarrow$ nur erste Ableitung.

Gewöhnlich $\Leftrightarrow$ y hängt nur von einer Variablen x ab.

Äquivalent: $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ usw.

Einfache Beisp:

1.) $y'(x) = f(x)$ [f unabh. von y]

$\Rightarrow$ alle Lösungen sind von der Form

$y(x) = F(x) + c$, wo $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ und $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

„Integrationskonst."

(allgemeine Lösung).

Lösungsmethoden: Kap. 11 bzw TX.

Durch Vorgabe einer Anfangsbedingung der Form $y(x_0) = y_0$ wird c festgelegt (sog. Anfangswertproblem).

[klar: DGl sagt nur „wie es weiter geht", „wie es losgeht" muss man selber sagen!]

2.) $$\dot{N}(t) = \underbrace{-k\,N(t)}_{f(t,N(t))}$$

(z.B. radioakt. Zerfall mit Rate k).

Allg. Lösung (erraten bzw. TX): $N(t) = C\,e^{-kt}$, $C \in \mathbb{R}$ bel.

Anfangsbed. $N(t_0) = N_0$ legt C fest.

12.1.1 Lineare DGl'en 1. Ordnung

$f(x,y)$ von der „linearen Form" (bezgl. y) $a(x)\,y + b(x)$:

$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

Beisp: 1.) & 2.) von oben.

Homogener Fall $(b(x)=0)$:

$$y'(x) = a(x)\, y(x)$$

TX

$$\text{"}\Leftrightarrow\text{"} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = \left(\ln y(x)\right)' = a(x) = A'(x), \qquad [\text{falls } y(x) > 0]$$

wo $A(x)$ Stammfkt von $a(x)$.

$$\Leftrightarrow \quad \ln y(x) = A(x) + c \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{A(x)+c} = e^{A(x)} \cdot \underbrace{e^{c}}_{=:C} = C\, e^{A(x)} \qquad [\text{falls } C \in \mathbb{R}^+]$$

Kontrolle: $y'(x) = C\, e^{A(x)} \cdot A'(x) = y(x)\, a(x) \; \checkmark \; (C \in \mathbb{R} \text{ bel!})$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = C\, e^{A(x)}}} \qquad (\text{allg. Lösung, } A'(x) = a(x), \; C \in \mathbb{R} \text{ bel.})$$

Mit Anfangsbed. $\underline{\underline{y(x_0) \overset{!}{=} y_0}}$: wähle $A(x) = \int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')$

$$\Rightarrow A(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = y_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} dx'\, a(x')}}}$$

Inhomogener Fall ($b(x) \neq 0$)

Beh.: Allg. Lösung von $y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$ ist von der Form

$$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}} \quad , \text{ wo}$$

$y_h(x)$ allg. Lösung der homogenen DGl., und

$y_p(x)$ partikuläre (= irgend eine) Lösung der inhomog. DGl.

Bew.: $y'(x) = y_h'(x) + y_p'(x) = a(x)\, y_h(x) + a(x)\, y_p(x) + b(x)$

$$= a(x)\, y(x) + b(x) \quad .$$

$y_h(x) = C\, e^{A(x)}$ kennen wir schon.

„Trick" um $y_p(x)$ zu finden (TX!):

<u>Variation der Konstanten.</u>

$\Leftrightarrow$ Ansatz $y_p(x) = C(x)\, e^{A(x)}$

$$\Rightarrow y_p'(x) = C'(x)\, e^{A(x)} + \underbrace{C(x) \overbrace{\left(e^{A(x)}\right)'}^{e^{A(x)} \cdot \overset{a(x)}{A'(x)}}}_{a(x)\, y_p(x)}$$

$$\overset{!}{=} a(x)\, y_p(x) + b(x)$$

$\Leftrightarrow \quad C'(x)\, e^{A(x)} = b(x)$

$\Leftrightarrow \quad C'(x) = b(x)\, e^{-A(x)}$

Eine Lösung ist (wir brauchen nur eine!)

$$\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \, b(x') \, e^{-A(x')} \qquad (x_0 \text{ bel.})$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = C(x) \, e^{A(x)} = \int_{x_0}^{x} dx' \, b(x') \, e^{A(x) - A(x')}$$

Insgesamt: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{y(x) = C e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} dx' \, b(x') \, e^{A(x) - A(x')}}} \qquad (\text{allg. Lsg}, \; A'(x) = a(x))$$

Bem: $A(x) - A(x') = \int_{x'}^{x} dx'' \, a(x'')$

Mit <u>Anfangsbed</u> $y(x_0) = x_0$: wähle $A(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \, a(x') \Rightarrow A(x_0) = 0, \; C = y_0 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{y(x) = y_0 \, e^{\int_{x_0}^{x} dx' a(x')} + \int_{x_0}^{x} dx' \, b(x') \, e^{\int_{x'}^{x} dx'' a(x'')}}}$$

Kontrolle & Beisp: Übungen.