c) Satz von Taylor (im Kap. 9 versprochener Bew.):

Sei $b \in \mathbb{R}$ bel. aber fest (und $f(x)$ hinreichend oft diff'bar)

$$\Rightarrow \quad f(b) = f(0) + r_0$$

f ist Stammfkt. von f'

$$r_0 := f(b) - f(0) = \int_0^b dx \underbrace{f'(x)}_{u'(x)\cdot v(x) \text{ mit } u(x) := -(b-x),\ v(x) := f'(x)} =$$

$$= \underbrace{-(b-x) f'(x) \Big|_0^b}_{-(b-b)f'(b) + (b-0)f'(0) = b f'(0)} - \int_0^b dx \left(-(b-x)\right) f''(x)$$

$$= b f'(0) + r_1$$

$$r_1 := \int_0^b dx \underbrace{(b-x) f''(x)}_{u'(x) v(x) \text{ mit } u(x) := -\frac{(b-x)^2}{2},\ v(x) := f''(x)}$$

$$= -\frac{(b-x)^2}{2} f''(x) \Big|_0^b - \int_0^b dx \left(-\frac{(b-x)^2}{2}\right) f'''(x)$$

$$= \frac{b^2}{2!} f''(0) + r_2$$

$$r_2 := \int_0^b dx\, \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) =$$

$$= \ldots = \frac{b^3}{3!} f'''(0) + r_3$$

u.s.w.

$$\Rightarrow f(b) = f(0) + b\, f'(0) + \frac{b^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_n$$

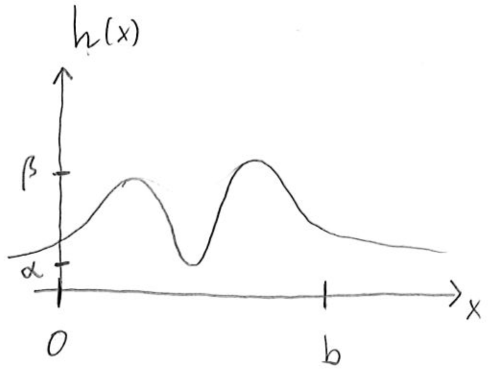
$$r_n := \int_0^b dx\, \frac{(b-x)^n}{n!} h(x) \quad , \quad h(x) := f^{(n+1)}(x)$$

Falls $b \geq 0$ und $\alpha := \min_{x \in [0,b]} h(x)$, $\beta := \max_{x\in[0,b]} h(x)$ folgt

$$r_n \geq \frac{\alpha}{n!} \int_0^b dx\, \underbrace{(b-x)^n}_{=: g(x) \Rightarrow G(x) = -\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}} = \frac{\alpha}{(n+1)!}\left(-(b-b)^{n+1} + (b-0)^{n+1}\right) = \alpha \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$$

Analog: $r_n \leq \beta \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow r_n = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}\gamma$$ für ein geeignetes $\gamma \in [\alpha, \beta]$



$\Rightarrow$ es gibt ein $z \in [0,b]$ mit $h(z) = \gamma$ (falls h stetig auf $[0,b]$).

Falls $b < 0$: genauso. Für $x := b$ folgt:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_n$$

$$r_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{h(z)}_{f^{(n+1)}(z)}$$

für ein geeigneten z zw. 0 und x

q.e.d.

4.) Substitution oder Variablentransformation:

Beh.:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_\alpha^\beta dy\, g'(y)\, f(g(y))$$

für jede diff'bare Fkt. $g(y)$ mit $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Bew: $\int_a^b dx\, f(x) = F(x)\Big|_a^b$ mit $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta dy\, \underbrace{g'(y)\, f(g(y))}_{F'(g(y))\cdot g'(y) = (F(g(y)))' \text{ (Kettenregel)}} = F(g(y))\Big|_\alpha^\beta = F(\overbrace{g(\beta)}^{b}) - F(\overbrace{g(\alpha)}^{a})$$

$$= F(x)\Big|_a^b = \int_a^b dx\, f(x)$$

Äquivalent (mit $x(y)$ statt $g(y)$):

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x) = \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} dy\, \frac{dx(y)}{dy}}_{\text{„mit } dy \text{ erweitert"}}\, f(x(y)) \quad , \text{ wo } x_1 = x(y_1),\ x_2 = x(y_2)$$

Falls <u>Umkehrfkt.</u> von $x(y)$ auf $[y_1, y_2]$ existiert

und mit <u>$y(x)$</u> bezeichnet, folgt

$$y_1 = y(x_1) \quad , \quad y_2 = y(x_2)$$

<u>Ziel</u>: Vereinfache Integral durch geschickte Transformation $x(y)$ von „alter Integrationsvariablen" x auf „neue Integrationsvariablen" y.

(„Substitution").

[Ist sehr mächtiges Werkzeug, erfordert aber viel „training"]

Beisp:

[$\underbrace{\text{ausmultiplizieren}}$ wäre sehr mühsam!]

1.) $$\underline{\underline{\int_0^2 dx\; x\,(1-x/2)^8}} =$$

| nahe liegende Wahl:
| $y(x) = 1 - x/2 \iff x(y) = 2(1-y)$
| $\Rightarrow x'(y) = -2$

$$= \int_{y(0)}^{y(2)} dy\; x'(y)\; x(y)\; y^8 = \int_1^0 dy\,(-2)\cdot 2(1-y)\,y^8$$

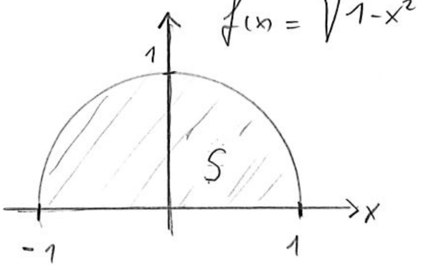
$$= \int_0^1 dy\; 2\; 2(1-y)\,y^8 = 4\int_0^1 dy\,(y^8 - y^9)$$

$$= 4\left(\frac{y^9}{9} - \frac{y^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = 4\left(\frac{1}{9} - 0 - \left(\frac{1}{10} - 0\right)\right) = 4\,\frac{10-9}{90} =$$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{45}}}$$

2.)

Halbe Fläche einer Kreisscheibe mit $r=1$:



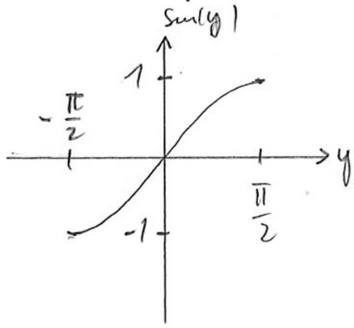
$$S = \int_{-1}^{1} dx \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{F(x)=?!} \overset{\uparrow}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \cos(y) \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(y)}}_{\cos(y)}$$

wähle $x(y) = \sin(y)$ (muss man „sehen"!)

$\Rightarrow x'(y) = \cos(y)$

$y(x) = \arcsin(x)$

$y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y(-1) = -\frac{\pi}{2}$



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Additionstheorem}}}{\cos(a+a) =} \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \underbrace{\sin^2 a}_{1-\cos^2 a} = 2\cos^2 a - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2a)\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\cos(2y)\right)}_{=: g(y) \Rightarrow G(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 0 - \left(-\frac{\pi}{4} + 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

5.) Partialbruchzerlegung

Grundidee: $$f(x) = \underbrace{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}_{F(x)=?} \overset{\overset{!}{a \neq b}}{=} \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{a-b}\left(\ln(x-a) - \ln(x-b)\right)$$

Analog für $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x^2 + \delta x + \epsilon}$ [falls Nenner zwei verschiedene reelle Nullstellen hat ($\hat{=}$ a und b oben).]

→ Übungen

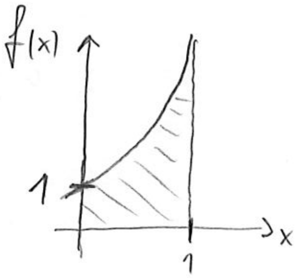
11.3 Uneigentliche Integrale

Am einfachsten anhand von **Beisp.**:

1.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \quad (x \overset{!}{<} 1) \Rightarrow F(x) = -2(1-x)^{1/2}$

$$\Rightarrow \int_0^b dx\, f(x) = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b = -2\sqrt{1-b} + 2 \quad \forall\, b < 1$$

Aber auch $b \to 1$ kein Problem $\Rightarrow$



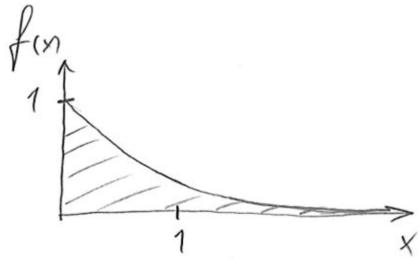
$$\int_0^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{1-x}} := \lim_{b \to 1} \int_0^b dx\, \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$$

2.) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \quad (x > -1) \Rightarrow F(x) = -(1+x)^{-1}$

$$\Rightarrow \int_0^b dx\, f(x) = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^b = -\frac{1}{1+b} + 1 \quad \forall\, b > -1$$

Aber auch $b \to \infty$ kein Problem:

$$\int_0^\infty dx\, \frac{1}{(1+x)^2} := \lim_{b\to\infty} \int_0^b dx\, \frac{1}{(1+x)^2} = 1$$



Weitere Beisp: Ü

11.4 Komplexwertige Integrale

Betrachte Fkt. $f(x)$ mit reellen Argumenten $x \in \mathbb{R}$ und

komplexen Funktionswerten $f(x) \in \mathbb{C}$ (in Kap. 10.1: auch Argument komplex).

Beisp: $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \left(e^{ix}\right)' = i e^{ix} = i\left(\cos x + i \sin x\right) = -\sin x + i \cos x$

oder $f'(x) = \left(\cos x + i \sin x\right)' = -\sin x + i \cos x$ ✓

$\Leftrightarrow$ man kann komplexe Fkt. „direkt" ableiten oder Real- und Imaginärteil separat ableiten.

Def: $F(x)$ heisst <u>Stammfkt.</u> von $f(x)$, falls $\underline{F'(x) = f(x)}$

und $\underline{\int_a^b dx\, f(x) := F(b) - F(a)}$

<u>Beisp:</u> $f(x) = e^{ix} \Rightarrow F(x) = -i e^{ix}$ (denn $F'(x) = -i \underbrace{(e^{ix})'}_{ie^{ix}} = e^{ix}$)

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, e^{ix} = -i e^{ix} \Big|_{-a}^{a} = -i e^{ia} + i e^{-ia} = -i \underbrace{(e^{ia} - e^{-ia})}_{2i \sin(a)} = 2 \sin(a)$$

oder $\int_{-a}^{a} dx\, (\cos x + i \sin x) = \int_{-a}^{a} dx \cos x + i \int_{-a}^{a} dx \sin x = \sin x \Big|_{-a}^{a} + i (-\cos x)\Big|_{-a}^{a}$

$$= \sin a - \underbrace{\sin(-a)}_{-\sin a} + i \left(-\cos a + \underbrace{\cos(-a)}_{\cos a}\right) = 2 \sin a \quad \checkmark$$

Fazit: praktisch alles „wie gewohnt"!