10.1 Bestimmtes Integral

Def.: Sei $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$\int_a^b dx\, f(x) := F(b) - F(a) \quad \text{bestimmtes Integral.}$$

Bem: jede andere Stammfkt. $F(x)+C$ ergibt selbes Resultat.

Äquivalent: $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b dy\, f(y)$, $\int_a^b dw\, f(w)$ usw.

[„Name der Integrationsvariable ändert nichts am Wert des Integrals."]

Schreibweise: $F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) = F(x)\Big|_a^b$$

Beisp.:

1.) $$\underbrace{\int_0^1 dx\, x^5}_{f(x)} = \underbrace{\frac{x^6}{6}}_{F(x)}\Big|_0^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$$

2.) $$\underbrace{\int_{-2}^{2} dx\, e^{2x}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{2x}}_{F(x)}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2} e^{4} - \frac{1}{2} e^{-4} = \sinh(4)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

3.) $$\underbrace{\int_0^{\pi} dx\, \sin x}_{f(x)} = \underbrace{-\cos x}_{F(x)}\Big|_0^{\pi} = -\underbrace{\cos \pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1} = 2$$

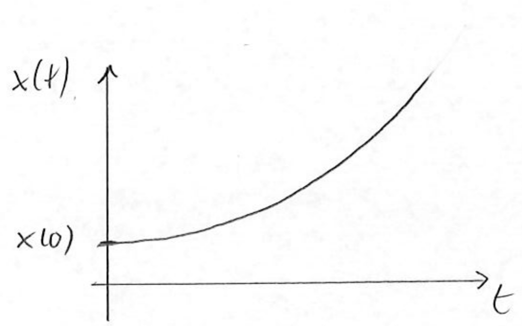
4.) $v(t) = a \cdot t$ „Geschw. bei konstanter Beschl. a".

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a t^2$ („Ort") ist Stammfkt.,

denn $\dot{x}(t) = at = v(t)$ ✓

$$\Rightarrow \int_0^t dt' \, v(t') = \underbrace{x(t')\Big|_0^t}_{x(t)-x(0)} = \frac{1}{2} a t^2 - \frac{1}{2} a 0^2$$

$$\Leftrightarrow x(t) = x(0) + \frac{1}{2} a t^2$$



Folgerungen:

1.) $\int_a^a dx\, f(x) = F(a) - F(a) = 0$

2.) $\int_b^a dx\, f(x) = F(a) - F(b) = -\int_a^b dx\, f(x)$

3.) $\int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$

$$= \int_a^c dx\, f(x)$$

4) $\int_a^b dx\, \underbrace{\left(f(x) + g(x)\right)} = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$

Stammfkt: $F(x) + G(x)$, denn $\left(F(x)+G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

$$= \int_a^b dx\, f(x) + \int_a^b dx\, g(x)$$

5.) $$\int_a^b dx\,(c\cdot f(x)) = cF(b) - cF(a) = c\,(F(b)-F(a)) =$$

Stammfkt. $cF(x)$, denn $(cF(x))' = c\,f(x)$

$$= c\cdot\int_a^b dx\, f(x) \qquad \forall\, c\in\mathbb{R}$$

6.) Andere Schreibweise:

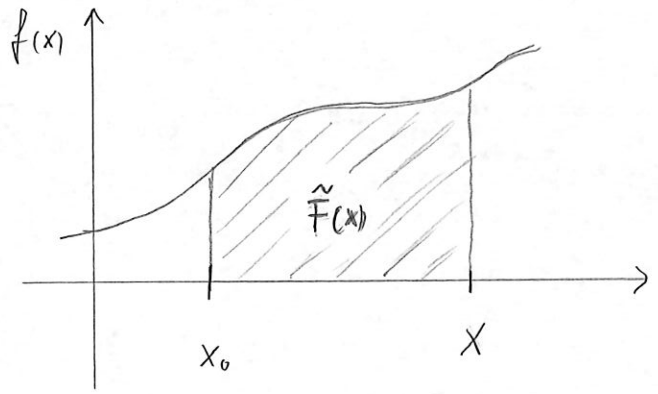
$$\int_{x_0}^{x} dy\, f(y) = F(x) - F(x_0)$$

Betrachte x_0 als bel. aber fest und x als variabel

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} dy\, f(y)}_{\underbrace{\frac{d}{dx}F(x)}_{f(x)} - \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{F(x_0)}_{\text{const.}}}_{0}} = f(x)$$

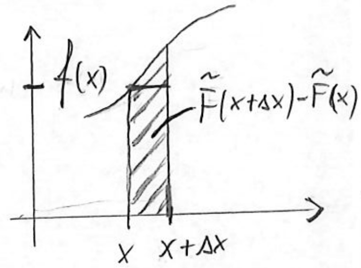
$$\Rightarrow \quad \int^x dy\, f(y) \;\hat{=}\; \int_{x_0}^{x} dy\, f(y) \quad \text{wo } x_0 \text{ „unbestimmt"}$$

7.) Geometrische Interpretation



$\tilde{F}(x)$:= schraffierte Fläche (x_0 bel. aber fest, x variabel).

$\Rightarrow \tilde{F}(x+\Delta x) - \tilde{F}(x) \longrightarrow f(x)\cdot\Delta x$ für $\Delta x \to 0$



$$\Rightarrow \tilde{F}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{F}(x+\Delta x) - \tilde{F}(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$\Rightarrow \tilde{F}(x)$ ist Stammfkt. von $f(x)$.

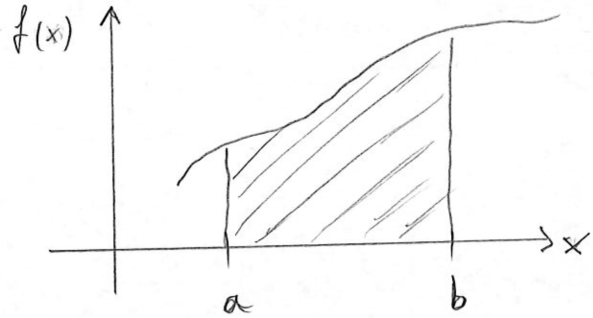
Ferner muss $\tilde{F}(x_0) = 0$ sein.

$\Rightarrow \tilde{F}(x) = F(x) - F(x_0)$ für jede bel. Stammfkt. von $f(x)$.

Fazit:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \mathrel{\hat{=}} \text{Fläche, die von } x\text{-Achse,}$$

Graph von $f(x)$, sowie a und b begrenzt wird:



Kurz: „Fläche unter $f(x)$". [analog zu: $f'(x) \mathrel{\hat{=}}$ Steigung der Tangente]

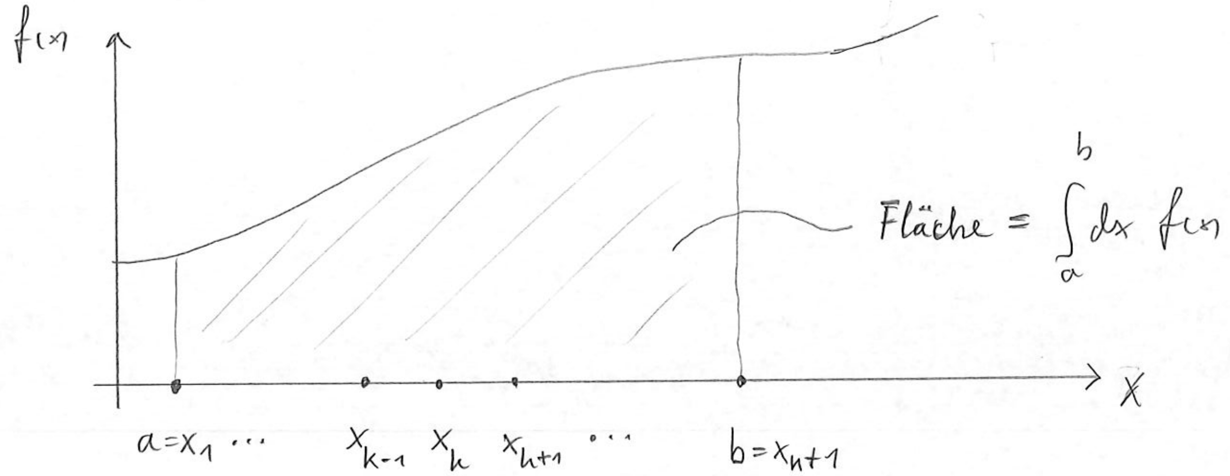
Sog. „Hauptsatz der Integralrechnung".

Bem:

a) Falls $b < a \Rightarrow$ Faktor (-1).

b) Falls $f(x) < 0 \Rightarrow$ Faktor (-1).

c) Betrachte:



$\delta x_k := x_{k+1} - x_k \quad , \quad k = 1, \ldots, n$ („Intervalle")

$\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad , \quad k = 1, \ldots, n$ („Stützstellen")

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\, \delta x_k}_{\text{sog. Riemann-Summe}} \xrightarrow[\delta x_k \to 0 \ \forall k]{n \to \infty} \underbrace{\int_a^b dx\, f(x)}_{\text{sog. Riemann-Integral}}$$

[In der Mathem. benutzt man dies als Def. von $\int_a^b dx\, f(x)$ und entwickelt daraus „rückwärts" das ganze bisherige Kap. 11.]

11.2 Integrationstechniken

[Systematische „Methoden", die „immer funktionieren" (analog zu „Ableitungsregeln") gibt es nicht, aber doch einige „Verfahren", die „oft funktionieren"]

1.) Integrand von der Form

(a) $$f(x) = c \cdot (g(x))^n g'(x) \quad , n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = c \cdot \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} \quad \text{ist Stammfkt.}$$

Bew: $$F'(x) = \frac{c}{n+1} \underbrace{\left((g(x))^{n+1}\right)'}_{(n+1)(g(x))^n \cdot g'(x)} = f(x)$$

Beisp: $f(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x} \Rightarrow g(x) = \ln x,\ c = 1 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$

(b) $\underline{\underline{f(x) = c \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}}}$ $\quad (\Leftrightarrow n = -1 \text{ in (a)})$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F(x) = c \cdot \ln(g(x))}}$

Bew: $F'(x) = \frac{c}{g(x)} \cdot g'(x) = f(x)$

Beisp.:

- $\underline{f(x) = \tan(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow g(x) = \cos x, \; c = -1$

  $\Rightarrow \underline{F(x) = -\ln(\cos x)}$

- $\underline{f(x) = \frac{1}{a+bx}} \Rightarrow g(x) = a + bx, \; g'(x) = b, \; c = \frac{1}{b}$

  $\Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{b} \ln(a + bx)}$

2.) Partielle Integration:

Integrand von der Form $u'(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b dx\, u'(x) \cdot v(x) = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx\, u(x) \cdot v'(x)$$

Bew: $$\int_a^b dx\, \underbrace{\left[u'(x)\, v(x) + u(x) \cdot v'(x)\right]}_{(u(x) \cdot v(x))' \text{ (Produktregel)}} = u(x)\, v(x) \Big|_a^b$$

$$= \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x) + \int_a^b dx\, u(x)\, v'(x)$$

Beisp:

a) $$\int_a^b \underbrace{dx\, e^x \cdot x}_{F(x)=?!} = \int_a^b dx\, \underbrace{\underset{u}{(e^x)'}\,\underset{v}{x}}_{\text{muss man „sehen"!}} = e^x \cdot x \Big|_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{e^x}_{f(x) \Rightarrow F(x) = e^x} \overbrace{(x)'}^{1} = e^x\, x \Big|_a^b - e^x \Big|_a^b$$

$$= \left(e^x \cdot x - e^x\right)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$ $F(x) = e^x (x-1)$ ist Stammfkt. von $f(x) = x\, e^x$

b) $$\int_a^b \underbrace{dx\, \ln x}_{F(x)=?!} = \int_a^b dx\, \underbrace{\underset{u}{(x)'}\,\underset{v}{\ln x}}_{\text{muss man „sehen"!}} = x \ln x \Big|_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{x \cdot \overbrace{(\ln x)'}^{\frac{1}{x}}}_{f(x) \Rightarrow F(x) = x} =$$

$$= x \ln x \Big|_a^b - x \Big|_a^b = (x \ln x - x)\Big|_a^b$$

$\Leftrightarrow$ $x \ln x - x$ ist Stammfkt. von $\ln x$