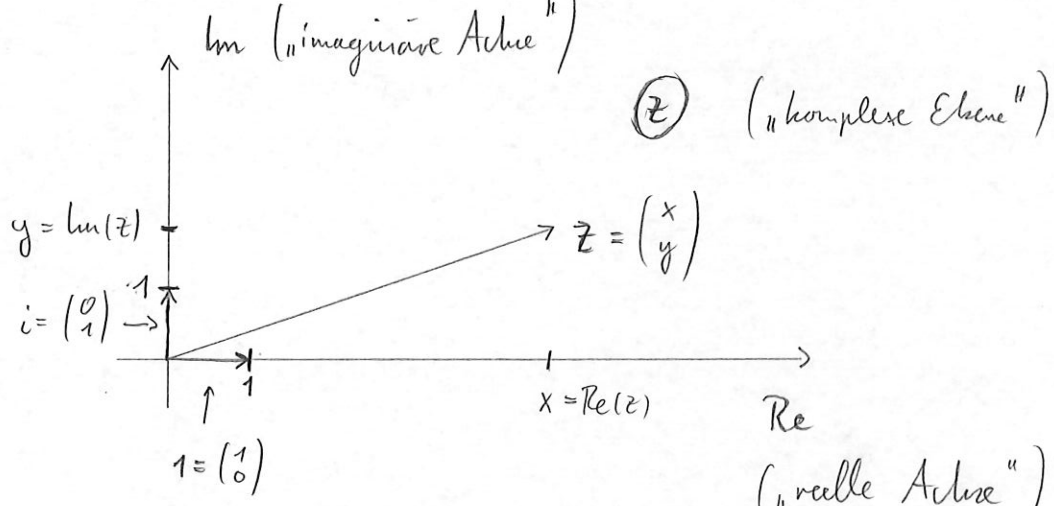
10.2. Gaußsche Zahlenebene (komplexe Ebene)

$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \xleftrightarrow{\text{eineindeutig}} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ („Ebene")

D.h. $z \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oder etwas ungenau: $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

„entspricht" / „äquivalent zu" ...

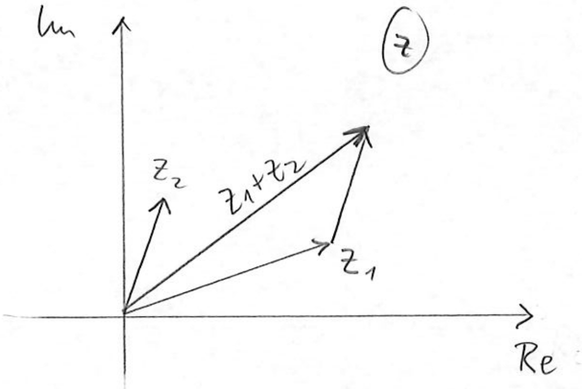


$\Rightarrow$ „Betrag" $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ genau wie im $\mathbb{R}^2$!

$z^* = x - iy \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$: Spiegelung an reeller Achse

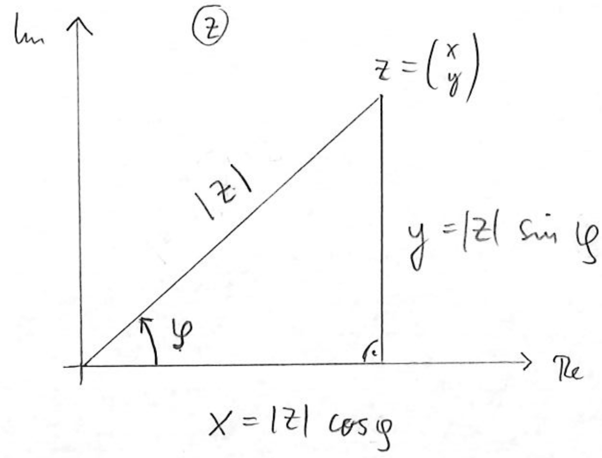
Addition : $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$ genau wie im $\mathbb{R}^2$!



$\sim$

Betrachte :



$$\varphi =: \arg(z) \overset{!}{\in} [0, 2\pi) \quad \text{„Argument von } z\text{"}$$

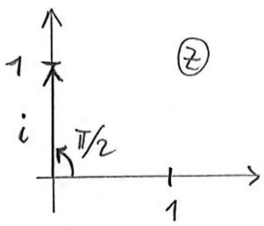
$$(\arg(0) := 0)$$

[Somit $\arg(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.]

$$\Rightarrow \quad z = x + iy = |z| \cos\varphi + i\, |z| \sin\varphi$$

$$= |z| \underbrace{(\cos\varphi + i \sin\varphi)}_{e^{i\varphi}}$$

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$



Beisp: $z = i$

$\Rightarrow \quad |i| = 1 \quad , \quad \arg(i) = \pi/2$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{i}} = |i|\, e^{i \arg(i)} = \underline{\underline{e^{i\pi/2}}}$

$\left[= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \quad \checkmark \right]$

$\sim$

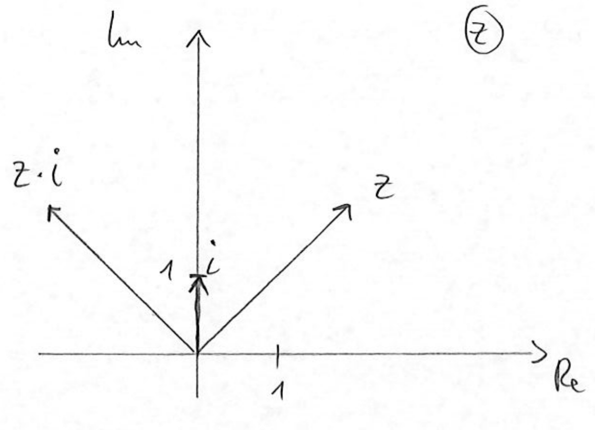
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{z_1 \cdot z_2}} = |z_1| \, e^{i \arg(z_1)} \; |z_2| \, e^{i \arg(z_2)}$$

$$= \underbrace{|z_1| \cdot |z_2|}_{|(z_1 \cdot z_2)|} \; e^{i \underbrace{(\arg(z_1) + \arg(z_2))}_{\arg(z_1 \cdot z_2) \ (\text{modulo } 2\pi)}}$$

d.h. komplexe Multipl. heisst: Längen werden multipliziert, Winkel werden addiert („Drehstreckung").

Beisp:

$$z \cdot i = |z| \, e^{i \arg(z)} \underbrace{|i|}_{1} e^{i \underbrace{\arg(i)}_{\pi/2}} = |z| \, e^{i(\arg(z) + \frac{\pi}{2})}$$



~

Logarithmus und Potenzen

Def.:

$$\ln(z) := \ln|z| + i \arg(z) \qquad \forall\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$$

↑ reeller Log. von $|z| \in \mathbb{R}^+$

$$b^z := e^{z \ln b} \qquad \forall\ b, z \in \mathbb{C},\ b \neq 0$$

Bem.:

- Für $z \in \mathbb{R}^+$: $|z| = z$, $\arg(z) = 0$ $\Rightarrow$ $\ln(z)$ wie bisher
- Für $b \in \mathbb{R}^+$: b^z wie bisher, ebenso z^n mit $n \in \mathbb{Z}$.

Beisp:

1.) Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt:

$$z^\alpha = e^{\alpha[\ln|z| + i\arg(z)]} = \underbrace{e^{\alpha \ln|z|}}_{\left(\underbrace{e^{\ln|z|}}_{|z|}\right)^\alpha} \cdot e^{\alpha i \arg(z)}$$

(alles reell!)

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}$$

2.) Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\arg(-x) = \pi$

$$\Rightarrow \sqrt{-x} := (-x)^{1/2} \overset{1.)}{=} \underbrace{|-x|^{1/2}}_{x^{1/2}} \underbrace{e^{i\frac{1}{2}\pi}}_{=i}$$

, siehe oben

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

(nicht $-i\sqrt{x}$ oder $\pm i\sqrt{x}$!)

$$\Rightarrow \sqrt{-1} = i$$

(nicht $\pm i$!)

3.) $z = e^{2\pi i} = 1$

$\Rightarrow \arg(z) = 0$, nicht 2π! $\Rightarrow \ln z = \ln|z| + i \cdot 0 = 0$, nicht $\ln|z| + i \cdot 2\pi = 2\pi i$

$\Rightarrow \sqrt{z} = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln z} = 1$

nicht $\sqrt{z} = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)} = e^{\frac{1}{2}2\pi i} = -1$

11 Integralrechnung

Integrieren $\hat{=}$ „Umkehrung" von Differenzieren.

Genauer: Gegeben sei eine reelle Fkt. $f(x)$. Gesucht ist eine

Fkt. $F(x)$ mit der Eigenschaft

$$\underline{\underline{F'(x) = f(x)}}.$$

Name: $F(x)$ heisst <u>Stammfkt.</u> von $f(x)$.

Schreibweise: $F(x) =: \int^x dy\, f(y)$

oder auch $F(x) = \int dy\, f(y)$ („<u>unbestimmtes Integral</u>")

Äquivalent: $\int^x f(y)\, dy$, $\int^x dz\, f(z)$, $\int^x dw\, f(w)$ usw.

(aber <u>nicht</u> $\int^x dx\, f(x)$!)

Beisp:

$f(x)$	$F(x)$	
e^x	e^x	, denn $(e^x)' = e^x$
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	, denn $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$(n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1)$, denn $(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n$

Bem:

1.) Falls $F(x)$ Stammfkt von $f(x)$, dann auch

$F(x)+c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, d.h. Stammfkt nicht eindeutig.

(Denn: $(F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x)$.)

2.) Integrieren ist im Allg. „schwieriger" als Ableiten.

„Kunst"　　　　„Handwerk"

3.) Einfachste „Methode": errate/vermute $F(x)$ und

teste dann, ob $F'(x) = f(x)$. [falls nicht: „verbessere" Vermutung]

4.) Typ. Anwendung: gegeben sei Geschw. $v(t) = \dot{x}(t)$

eines Teilchens. Finde $x(t)$ (Ort).

5.) Für welche $f(x)$ existiert $F(x)$ überhaupt? → Analysis-Vorl.