2.) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\Rightarrow \underline{z_1 + z_2} = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = \underline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)}$$

d.h. $\mathrm{Re}(z_1+z_2) = x_1 + x_2$

$\mathrm{Im}(z_1+z_2) = y_1 + y_2$

$$\underline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1x_2 + x_1 iy_2 + iy_2x_2 + i^2 y_1y_2 =$$

$$= \underline{\underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)}}$$

3.) $z = x + iy$, $z \neq 0$ (d.h. $x = y = 0$ ausgeschlossen)

$$\Rightarrow \underline{\underline{z^{-1}}} := \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \underbrace{\frac{x-iy}{x-iy}}_{1} = \frac{x-iy}{x^2 - \underbrace{(iy)^2}_{i^2y^2 = -y^2}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{(-y)}{x^2+y^2}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Re}(z^{-1}) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}\ , \ \mathrm{Im}(z^{-1}) = -\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}}}$$

Probe: $z \cdot z^{-1} = (x+iy)\,\frac{(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2 - \overbrace{(iy)^2}^{-y^2}}{x^2+y^2} = 1$ ✓

4.) [Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot i^2 = -z \Rightarrow z/i^2 = -z$

z.B.:] $i^0 := 1$ (wie immer), $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,

$i^4 = 1$, ...

ebenso $i^{-1} = \frac{i}{i^2} = -i$, $i^{-2} = -1$, $i^{-3} = +i$, $i^{-4} = +1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{i^{n+4} = i^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}}}$$

Nochmals: alle „Rechenregeln" (sog. Körperaxiome) sind in $\mathbb{C}$ genau gleich wie in $\mathbb{R}$, nur die „Zahlenmengen" $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ sind unterschiedlich $\Rightarrow$ alle in $\mathbb{R}$ gültigen „Formeln" gelten weiterhin in $\mathbb{C}$! z.B.

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad \forall\, z \neq 1 \ , n \in \mathbb{N} \quad \text{(geom. Reihe)}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{C} \quad \text{(binom. Formel)}$$

usw.

Auch die Grundeigenschaften des „Betrags" sind genau gleich:

- $|z| > 0$ falls $z \neq 0$ und $|z| = 0$ falls $z = 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Bew: Ü).

Andererseits: Für bel. $x, y \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ gilt entweder $x > y$ oder $x = y$ oder

$x < y$ (Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$).

<u>Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine solche Ordnungsstruktur!</u>

Grund: jede solche Struktur würde $-1 = i^2 \geq 0$ implizieren.

$\Leftrightarrow$ <u>die Zeichen „>" und „<" sind auf $\mathbb{C}$ nicht definiert</u>

<u>bzw. sinnlos!</u>

10.1 Komplexe Funktionen

[Ist grosses eigenes Gebiet. Hier nur kleine Auswahl.]

1.) $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto P(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad , \; a_k \in \mathbb{C} \; , \; a_n \neq 0 \; , \; n \in \mathbb{N}_0$$

(Polynom n-ter Ordn.)

Satz: Es existieren n Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Bew: Mathem.-Vorl.

Bem:

- $z_1, \dots, z_n$ sind die Nullstellen von $P(z)$

  (müssen nicht unbedingt alle verschieden sein: sog. Mehrfachnullst.).

- Im $\mathbb{R}$ gibt es keinen solchen Satz!

- Allg. Formeln, wie man die z_k's aus den a_k's erhält:

  einfach für $n = 1, 2$; kompliziert für $n = 3, 4$; kann es nicht

  geben für $n \geq 5$.

- Graphische Darstellung: kompliziert / nutzlos.

2.) Folgen, Reihen, Potenzreihen und deren Konvergenz:

(fast) Wort für Wort wie „im Reellen."

Insbes.:

$$\underline{\underline{\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}} \quad \left(\text{konvergiert } \forall\, z \in \mathbb{C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)} \quad \forall\, z_{1,2} \in \mathbb{C} \quad \underline{\underline{\text{usw.}}}$$

3.) Potenzen für Basis $\underline{b \in \mathbb{R}^+}$ wie bisher:

$$\underline{\underline{b^z := \exp(z \ln b)}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

↑ „reeller Log."

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{e^z = \exp(z)}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Ferner: z^n für bel. $n \in \mathbb{Z}$: def. wie immer.

- b^z mit $b \in \mathbb{C}$ → Kap. 10.2

4.) „Einheitskreis" gibt es nicht mehr in $\mathbb{C}$! Daher jetzt Def.:

$$\underline{\underline{\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\underline{\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Für $z \in \mathbb{R}$ genau wie bisher!

- Keine einfache „graphische Darstellung" mehr!

- $(-z)^{2k} = \underbrace{(-1)^{2k}}_{((-1)^2)^k = 1} z^{2k} = z^{2k} \Rightarrow (-z)^{2k+1} = (-1)\underbrace{(-1)^{2k}}_{1} z^{2k+1} = -z^{2k+1}$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\sin(-z) = -\sin(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\underline{\cos(-z) = \cos(z)}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

5.) $(i)^{2k} = (\underbrace{i^2}_{-1})^k = (-1)^k$

$\Rightarrow \quad (iz)^{2k} = (-1)^k z^{2k} \quad , \quad (iz)^{2k+1} = i\,(-1)^k z^{2k+1}$

$$\Rightarrow \quad e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(iz)^{2k}}^{(-1)^k z^{2k}}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{(iz)^{2k+1}}^{i(-1)^k z^{2k+1}}}{(2k+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(z)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(z)}$$

$$\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

<u>Euler-Formel</u>

$$\Rightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = \cos(z) + i\sin(z) + \underbrace{\cos(-z)}_{\cos(z)} + i\underbrace{\sin(-z)}_{-\sin(z)}$$

$$= 2 \cdot \cos(z) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = \cos z + i\sin z - (\cos z - i\sin z) = 2i\sin z \Leftrightarrow$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

6.) Speziell für $z = x$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\underline{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Euler})$$

$$\underline{\underline{\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e^{2\pi i}}} = \underbrace{\cos(2\pi)}_{=\cos(0)=1} + i\underbrace{\sin(2\pi)}_{=\sin(0)=0} = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{e^{z+2\pi i}}} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = \underline{\underline{e^{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}}}$$

7.) Speziell für $z = \pi$:

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{e^{i\pi} + 1 = 0}}$$

<u>erstaunliche Verknüpfung zw. wichtigsten Zahlen der</u>

<u>Mathematik: e, π, 1, 0, i !</u>

8.) Differenzieren:

(fast) Wort für Wort wie „im Reellen" (nur „zeichnen" kann man jetzt nicht mehr!).

z. B.:

- Alle „Ableitungsregeln".
- $(z^k)' = k\,z^{k-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$
- $(e^z)' = e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$
- $(\sin z)' = \cos z \quad$ —〃—

usw.