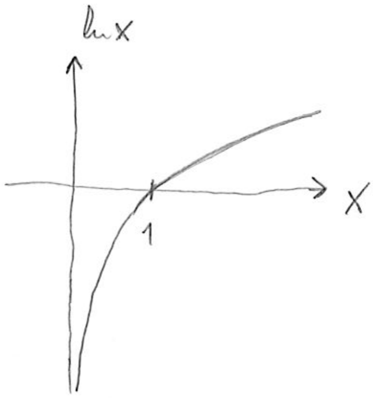
Beisp:




$f(x) := \ln x \quad , \quad x_0 = 1$

$\Rightarrow f(x_0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = 1$

$f''(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} \quad , \quad f''(x_0) = -1$

$f'''(x) = (-1)\underbrace{(x^{-2})'}_{(-2)x^{-3}} = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(x_0) = 2$ usw.

$$\Rightarrow f(x+x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}}_{1} x + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{f'''(x_0)}{3!}}_{\frac{1}{3}} x^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^4 + \ldots$$

Genauere Betrachtung: Konvergenz (d.h. $r_n(x) \to 0$) $\Leftrightarrow |x| < 1$.

Aber: jedes $y > \frac{1}{2}$ lässt sich schreiben als $y = \frac{1}{1+x}$ mit $|x| < 1$.

Wegen $\ln\Big(\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{(1+x)^{-1}}\Big) = -\ln(1+x)$ erhält man so auch $\ln y \ \forall\, y > 1/2$.

[auch Taschenrechner macht das (im Prinzip) so].

Weitere Beisp: Ü

## Anwendung

**Frage:** Wenn $f(x)$ und $g(x)$ beide $\to 0$ für $x \to x_0$, was passiert dann mit $\frac{f(x)}{g(x)}$ ?

**Antw:**

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}\left((x-x_0)^2\right)$$

$$g(x) = \underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}\left((x-x_0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)}{g'(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}((x-x_0)^2)} = \frac{f'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}{g'(x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{falls } f(x_0) = g(x_0) = 0}$$

„Regel von de l'Hospital"

Beisp: $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x$, $x_0=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(\ln(1+x))'}^{\frac{1}{1+x}}}{\underbrace{x'}_{=1}} = 1$$

Somit $\lim_{x\to 0}\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)\to 1}} = e^1 = e \iff$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$\Rightarrow$ die Folge $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert für $n\to\infty$ gegen $e$.

[direkt: schwierig $\Leftrightarrow$ Mathem. $\hat{=}$ Vermeidung komplizierte Rechnungen!]

Beh: Genauso, wenn $f(x), g(x) \to \infty$ für $x \to x_0$.

Bew: weggelassen (nicht schwierig).

Beisp: $\underbrace{f(x) = -\ln x}_{\to\infty \text{ für } x\to 0}$, $\underbrace{g(x) = x^{-\alpha}}_{\text{ebenso}}$ $(\alpha > 0)$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(-\ln x)'}^{=-\frac{1}{x}}}{\underbrace{(x^{-\alpha})'}_{\overset{\text{ü}}{=} -\alpha x^{-\alpha-1} = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \underbrace{x^{x}}_{e^{x\ln x \to 0}} = e^{0} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^{x} = 1$$

Daher ist Def. $0^0 := 1$ sinnvoll!

Beh: Genauso, wenn $x \to \infty$.

Bew: weggelassen (nicht schwierig)

Beisp:

1.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{\alpha>0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{=\frac{1}{x}}{(\ln x)'}}{\underbrace{(x^\alpha)'}_{\alpha x^{\alpha-1} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\ln x$ wächst langsamer als $x^\alpha$ $\forall \alpha > 0$

2.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \underset{\alpha>0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x}}_{\frac{x^\alpha}{e^x}\cdot\frac{\alpha}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)}_{\to 1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$\Leftrightarrow$ $e^x$ wächst schneller als $x^\alpha$ $\forall \alpha > 0$

# 10 Komplexe Zahlen

Schule: Man beginnt mit $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$, aber z.B. $1+x=0$ hat dann keine Lösung $\Rightarrow$ erfinde „neue Zahl" $-1$ mit der Eigenschaft $1+(-1)=0$. Nimm auch noch $-n := (-1)\cdot n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$ dazu (sowie alle bisherigen $\underline{\underline{m \in \mathbb{N}_0}}$)

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ [ganze Zahlen]. Damit kann man dann „wie gewohnt" rechnen und macht sich bald keine Gedanken mehr dazu

[ gibt es $-1$ überhaupt? „Gesehen" hat sie noch niemand! Ist sie eindeutig? Ansonsten: welche wählen? ... ]

Hier analog:

In $\mathbb{R}$ hat $1+x^2=0$ keine Lösung $\Rightarrow$ erfinde „neue Zahl"

<u>$i$ (imaginäre Einheit)</u> mit der Eigenschaft $1+i^2=0$ bzw.

$$\boxed{\underbrace{i^2}_{i\cdot i} = -1}.$$

Nimm auch noch $i\cdot y \; \forall y \in \mathbb{R}$ dazu (sowie alle bisherigen $x \in \mathbb{R}$ sowie Kombinationen von Beiden) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\mathbb{C} := \{ x+iy \mid x,y \in \mathbb{R} \}}} \quad \text{(komplexe Zahlen)}$$

und rechne ansonsten einfach weiter „wie gewohnt".

Bem:

- Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich also schreiben als

$$\underline{\underline{z = x + iy}}$$

mit eindeutigen $x, y \in \mathbb{R}$. Insbes. sind zwei Zahlen

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ gleich, d.h. $\underline{\underline{z_1 = z_2}}$

$\Longleftrightarrow$ $x_1 = x_2$ und gleichzeitig $y_1 = y_2$.

- Bezeichnungen:

$x = \operatorname{Re}(z)$ „Realteil von $z$" $(\in \mathbb{R})$

$y = \operatorname{Im}(z)$ „Imaginärteil von $z$" $(\in \mathbb{R})$

d.h. $\underline{\underline{z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)}}$

$z$ „rein reell" $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

$z$ „rein imaginär" $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ (und $\mathrm{Im}(z) \neq 0$).

- Weitere Defs. für bel. $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$z^* := x - iy$ „komplexe Konjugation"

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ „Betrag"

Falls $z \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 0$ (s. oben) $\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} \mathrel{\hat{=}}$ „reeller Betrag" ✓

Beisp:

1.) $z_1 = 1+2i \quad , \quad z_2 = 2-i$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_1 + z_2}} = 1+2i+2-i = \underline{\underline{3+i}}$

$\underline{\underline{z_1 \cdot z_2}} = (1+2i)(2-i) = 2 - i + 4i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 2+3i-2(-1) = \underline{\underline{4+3i}}$

$\underline{\underline{z_1 / z_2}} = \frac{1+2i}{2-i} \cdot \overbrace{\frac{2+i}{2+i}}^{1} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+4i+2i^2}{2^2-i^2}$

$= \frac{2+5i+2(-1)}{4-(-1)} = \frac{5i}{5} = \underline{\underline{i}}$

Probe: $z_2 \cdot i = 2i - i^2 = 2i+1 = z_1$ ✓

$Re(z_1) = 1$

$Im(z_1) = 2$

$z_1^* = 1-2i$

$|z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$