Rechenmethoden der Physik I (WS23/24)

P. Reimann

Internetseite : siehe eKVV

Direkte Fortsetzung des integrierten Vorkurses.

Tutorien: 1. Termin in Präsenz, dort wird Weiteres erklärt.

Gruppeneinteilung → email an Tutoren.

9. Taylor-Reihen

Frage: Wie gut kann man eine Fkt. $f(x)$ mittels Polynome approximieren und mittels Potenzreihen [„unendl. Polynome"] ev. sogar exakt reproduzieren? (Vgl. Ende Kap. 3.4).

Beisp:

Geom. Reihe: $\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad \forall\ |r|<1$ (Kap. 5.2)

$\Rightarrow$ Die Fkt. $f(x) := \frac{1}{1-ax}$ lässt sich auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k \quad \text{falls } |ax|<1 \iff |x| < \frac{1}{|a|} \quad \text{oder}$$

mit $c_k := a^k$ als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k \quad \text{(Potenzreihe).}$$

Nehmen wir also einmal an:

(i) $f(x)$ kann als Potenzreihe geschrieben werden (d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ für geeignet gewählte } c_k) \text{ und}$$

(ii) ist bel. oft diff'bar.

$$0^0 := 1, \quad 0^k = 0 \ \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow f(0) = c_0 \cdot 1$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underbrace{k}_{0 \text{ für } k=0} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow f'(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot \underbrace{(k-1)}_{0 \text{ für } k=1} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) x^{k-2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = c_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

usw: $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \, x^{k-n}$$

$$f^{(n)}(0) = c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 1 \cdot 1 = c_n \cdot n!$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}$$

(„<u>Taylor-Reihe</u>" oder
„<u>Taylor-Entwicklung um 0</u>")

[oder „Taylor-Formel"]

Beisp.:

1.) $f(x) := \exp(x+y)$, $y \in \mathbb{R}$ bel. aber fest.

$\Rightarrow$ (ii) erfüllt, (i) später.

$$f'(x) = \exp(x+y) \cdot \underbrace{(x+y)'}_{=1} = f(x)$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = f(x) \quad \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = f(0) = \exp(y) \quad \forall k$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \exp(y) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\exp(x)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\hat{=}$ in Kap. 5.4 versprochener Bew!

[kein Zirkelschluss: nur Def. von $\exp(x)$ und Ableitungsregeln benutzt]

[Bem.:

$$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

Taylor übernimmt für uns das „lästige"

Ausmultiplizieren von $(x+y)^k$!

Analog für binomische Formel $\Rightarrow$ Übungen]

2.) $f(x) := \sin x \quad \Rightarrow \quad$ (ii) ✓ , (i) später.

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x \, , \quad f''(x) = -\sin x \, , \quad f'''(x) = -\cos x \, , \quad f^{(4)}(x) = \sin x \quad \text{usw.}$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \, , \quad f'(0) = 1 \, , \quad f''(0) = 0 \, , \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0 \, , \quad \text{u.s.w.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{1!} x^1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^5 + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

(so macht's der Taschenrechner!)

3.) Viele weitere Beisp. in Übungen, z.B.

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$\sim$

Frage 1: Wie gut lässt sich $f(x)$ approximieren durch

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{(„Taylor-Polynom")} \quad ?$$

[„abgebrochene Taylor-Reihe"]

Frage 2: $p_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$?

Antwort steckt im

Satz von Taylor:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

wo $$r_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{(„Restglied")}$$

für ein geeignet gewähltes z zwischen 0 und x

(falls $f(x)$ hinreichend oft diff'bar).

Bew.: später. (Kap. 11).

$\Rightarrow$ Antwort 1: $\left| f(x) - p_n(x) \right| = \left| r_n(x) \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(z) \right|$

Antwort 2: $p_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow r_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$

(präzisiert bzw ersetzt (i)).

Bem: Falls für alle z zwischen 0 und x gilt:

$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq a \cdot q^n$ für geeignet gewählte $a, q \in \mathbb{R}^+$,

dann folgt $\left| r_n(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} a\, q^{n+1} = a \frac{|q x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

für $n \to \infty$ (sonst würde $\exp(|q x|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|q x|^k}{k!}$ nicht konvergieren!).

Beisp 1: $f^{(n)}(x) = f(x) = \exp(x+y) \Rightarrow$ wähle $a = \exp(|x| + |y|)$ und $q = 1$.

Beisp 2: $\left| f^{(n)}(x) \right| = \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1}$ oder $\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} \Rightarrow$ wähle $a = 1$, $q = 1$.

Bem:

- Ableitungen von $f(x)$ bei $x=0$ legen also $f(x)$ bereits fest!
- Ziemlich offensichtlich: je kleiner x, desto schneller wird $r_n(x)$ klein.
- Im Allg. hängt z im Restglied von x und von n ab.
- Genauere Angabe von z meist schwierig und gar nicht benötigt.
- „Physiker-Schreibweise":

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\mathcal{O}(x^{n+1})}$$

„Term (bzw. „Fehler") der Ordnung x^{n+1}"

d.h. dieser Term strebt für kleine x (bzw $|x|$) mindestens genau so rapide nach 0 wie x^{n+1}.

- Betrachte „Hilfsfkt." $g(x) := f(x+x_0)$ mit einem bel. „Referenzpkt." x_0.

$$\Rightarrow \quad g(0) = f(x_0)\,,\quad g'(0) = f'(x_0)\,,\quad \ldots\,,\quad g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{g^{(k)}(0)}^{= f^{(k)}(x_0)}}{k!}\, x^k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{f(x+x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, x^k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x-x_0)^k} \qquad \text{(Taylor-Entwicklung um } x_0\text{)},$$

analog: $P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$,

$r_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ mit z zwischen x_0 und x,

usw.