Probeklausur

In der echten Klausur werden Sie ca. 2.5 Stunden haben und über **keine Hilfsmittel** verfügen. Die folgenden Aufgaben würden etwa 60–70% der „normalen“ (= zu langen!) Länge einer Klausur darstellen.

1. Zwei-Körper-System

Betrachten Sie ein System aus zwei Punktmassen m_1, m_2 mit jeweiligen Ortsvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$.

i. Wie lautet die reduzierte Masse des Systems? Wie ist der Ortsvektor $\vec{X}$ des Schwerpunkts definiert?

ii. Zeigen Sie, dass die gesamte kinetische Energie der Punktmassen in die Energie des Schwerpunkts und die kinetische Energie der Relativbewegung aufspaltet.

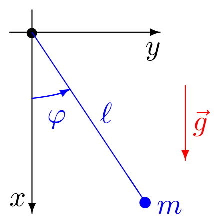
2. Ebenes Pendel mit zeitabhängiger Länge

i. Vorbereitung

a) Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen?

b) Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

ii. Betrachten Sie ein ebenes Pendel bestehend aus einer Masse m am Ende eines masselosen Stabs dessen Länge ℓ mit der Zeit variieren kann. Das ganze System liegt im Schwerefeld $g\,\vec{e}_x$.



a) Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die (Standard-)Lagrange-Funktion.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

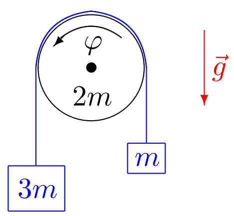
d) Angenommen $\ell(t) = \ell_0 + \alpha t$ mit ℓ_0 und α konstanten Zahlen. Zeigen Sie aus dem Ergebnis aus **ii.c)**, dass sich für kleine Ablenkungen $\varphi(t)$ die Differentialgleichung

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\ell^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ell} + \frac{g}{\alpha^2}\varphi = 0$$

ergibt — die Lösung dieser Gleichung wird *nicht* gefragt.

3. Atwood'sche Fallmaschine

Zwei Gewichte (Massen m und $3m$) im homogenen Erdschwerefeld $\vec{g}$ seien mit einer masselosen Schnur über eine drehbare zylinderförmige Rolle (Radius R, homogen verteilte Masse $2m$) verbunden.



i. Wie ist das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine Achse definiert? Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment der Rolle bezüglich ihrer Drehachse $I = mR^2$ ist.

ii. Wählen Sie den Rotationswinkel φ der Rolle als verallgemeinerte Koordinate und stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung auf. Welche Beschleunigung erfährt die Masse m?

iii. Bestimmen Sie den zu φ kanonisch konjugierten Impuls p_φ und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch φ und p_φ aus. Geben Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen an.

4. Feld einer elektrisch geladenen Kugelschale

Berechnen Sie für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer homogen geladenen, unendlich dünnen, statischen, leeren Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q, deren Zentrum im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Hinweis: Das elektrostatische Potential ist überall stetig