

## Übung Nr.9

### 36. Pendel mit Hula-Hoop-Reifen

Ein Hula-Hoop-Reifen wird als eine unendlich dünne, homogene Massenverteilung modelliert, die einen Kreis mit Radius  $R$  macht.

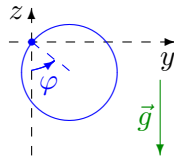
#### i. Trägheitsmomente

Sei  $m$  die Masse des Hula-Hoop-Reifens. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Reifens um die Achse des Kreises. Folgern Sie daraus das Trägheitsmoment  $I'$  des Reifens um eine Drehachse, die parallel zur Kreisachse durch einen Punkt des Kreises durchläuft.

*Hinweis:* Sie sollten  $I' = 2mR^2$  finden. . .

#### ii. Pendel

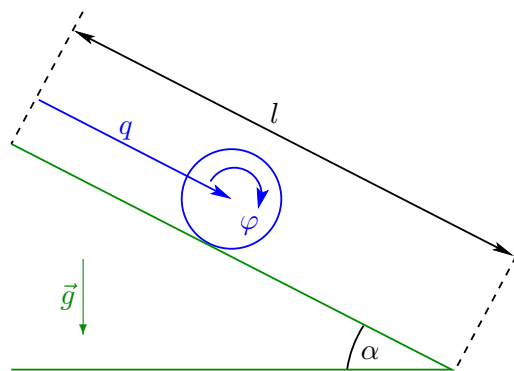
Ein Punkt eines Hula-Hoop-Reifens mit Masse  $m$  und Radius  $R$  wird an einer festen Achse parallel zur  $x$ -Richtung aufgehängt. Der Reifen kann sich reibungslos um die Achse drehen, wobei er in der  $(y, z)$ -Ebene bleibt. Das ganze System liegt im Schwerfeld  $-g\vec{e}_z$ .



- Drücken Sie die Standard Lagrange-Funktion des Systems durch den Winkel  $\varphi$  aus und stellen Sie die entsprechende Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung auf.
- Bestimmen Sie den zu  $\varphi$  kanonisch konjugierten Impuls  $p_\varphi$  und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch  $\varphi$  und  $p_\varphi$  aus. Geben Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen an.

### 37. Abrollende starre Körper

i. Unter dem Einfluss des Schwerfeldes  $-g\vec{e}_z$  rollt ein homogener Zylinder mit Masse  $M$  und Radius  $R$  ohne zu gleiten eine schiefe Ebene der Länge  $l$  mit Neigungswinkel  $\alpha$  hinab.



- Berechnen Sie zuerst das Trägheitsmoment  $I$  des Zylinders bezüglich seiner Achse.
- Drücken Sie die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $V$  durch die generalisierten Koordinaten  $q$  und  $\varphi$  aus.
- Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es?

d) Stellen Sie die Euler–Lagrange–Gleichung für die Koordinate  $q$  auf und lösen Sie sie. Bestimmen Sie die Laufzeit für die Strecke  $l$ .

ii. Neben dem homogenen Vollzylinder der Frage i. rollen auch eine homogene Kugel und ein homogener Hohlzylinder (mit Masse nur bei  $r = R$ ) jeweils mit Masse  $M$  und Radius  $R$  ab.

Indem Sie die Schritte der Frage i. (Trägheitsmomente, Euler–Lagrange–Gleichungen) für die Kugel und den Hohlzylinder wiederholen, bestimmen Sie die jeweiligen Laufzeiten. Welcher von den drei Körpern legt die Strecke in der geringsten Zeit zurück?

### 38. Hamilton-Formalismus in Kugelkoordinaten

In Aufgabe 25 haben Sie die Standard Lagrange-Funktion eines Massenpunkts  $m$  in einem Potential  $V$  in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  gefunden:

$$\mathcal{L}(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - V(r, \theta, \varphi). \quad (1)$$

i. Bestimmen Sie die zu den Variablen  $(r, \theta, \varphi)$  kanonisch konjugierten Impulse  $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$  und drücken Sie die Hamilton-Funktion durch die verallgemeinerten Koordinaten und die kanonischen Impulse aus.

ii. Geben Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen an.

### \*39. Hamilton-Formalismus

Betrachten Sie noch einmal die drei Systeme vom Blatt 7, Aufgabe 28. Zur Erinnerung waren die jeweiligen Lagrange-Funktionen

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[ R^2 + \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{mgh}{2\pi} \varphi \quad \text{für 28.i.};$$

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad \text{für 28.ii.};$$

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) + m_2 g l \cos \theta \quad \text{für 28.iii.}$$

Bestimmen Sie jeweils die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der kanonischen Impulse. Leiten Sie daraus die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ab.