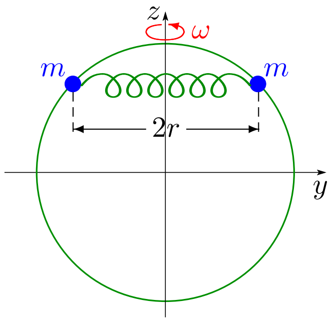
Übung Nr.8

32. Zwei durch eine Feder verbundene Massen auf einem Ring

Zwei identische Massen m, die durch eine Feder verbunden sind, können sich reibungsfrei entlang eines Rings mit Radius R bewegen, wobei die Feder immer parallel zur horizontalen (x, y)-Ebene bleibt — anders gesagt sind die zwei Massen auf der gleichen Höhe z. Der Ring dreht sich um die vertikale z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$. Die Feder hat die Stärke k und ihre Ruhelänge $\ell_0 \equiv 2r_0$ ist kleiner als der Durchmesser des Rings, d.h. $r_0 < R$.



i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Drücken Sie die (Standard-)Lagrange-Funktion des Systems durch zylindrische Koordinaten (r, θ, z) aus. Zeigen Sie, dass sie sich in der Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(z)\dot{z}^2 - V_{\text{eff.}}(z) \tag{1a}$$

mit einer positionsabhängigen Masse bzw. einem eindimensionalen effektiven Potential

$$\mu(z) \equiv \frac{2m}{1 - z^2/R^2} \quad \text{bzw.} \quad V_{\text{eff.}}(z) \equiv 2k\left(\sqrt{R^2 - z^2} - r_0\right)^2 - m\omega^2(R^2 - z^2) \tag{1b}$$

umschreiben lässt.

ii. Folgern Sie aus dem effektiven Potential (1b) die möglichen Gleichgewichtspositionen z_ω der Massen. Diese Positionen lassen sich durch R und

$$\xi(\omega) \equiv \frac{2kr_0}{2k - m\omega^2} = \frac{r_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \tag{2}$$

einfach ausdrücken, wobei $\omega_0 \equiv \sqrt{2k/m}$.

Hinweis: Sie können schon die Gleichgewichtspositionen z_0 (sowie ihre Stabilität) für $\omega = 0$ anhand Ihrer physikalischen Intuition raten: diese Ergebnisse sollen Sie als Grenzwert der gesuchten z_ω im Fall $\omega = 0$ wiederfinden.

iii. Diskutieren Sie die Stabilität der Gleichgewichtspositionen z_ω. Zeigen Sie, dass sich unterschiedliche Möglichkeiten ergeben, je nachdem, ob ω kleiner oder größer als die „kritische Winkelgeschwindigkeit“

$$\omega_c \equiv \omega_0\sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)} \tag{3}$$

ist. Plotten Sie V_{eff} in Abhängigkeit von z/R für $r_0 = R/2$ und die Fälle $\omega = 0.4\omega_c$, ω_c und $1.4\omega_c$.

iv. Geben Sie die Eigenkreisfrequenzen Ω der kleinen Schwingungen um die in Frage **iii.** gefundenen stabilen Gleichgewichtsstellen. Drücken Sie Ω durch ω, ω_0 und ω_c und plotten Sie Ω in Abhängigkeit von ω/ω_c für $r_0 = R/2$.

33. Rotierende Feder

Sei eine Feder mit Ruhelänge ℓ_0 und Federkonstante k. Ein Ende der Feder ist fest am Ursprungspunkt angebracht, am anderen Ende ist ein Massenpunkt m befestigt, der sich reibungsfrei in einer horizontalen Ebene bewegen kann. Das ganze Problem ist zweidimensional, d.h. sowohl die Masse als auch die Feder bleiben in dieser horizontalen Ebene.

i. Wie lauten die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen?

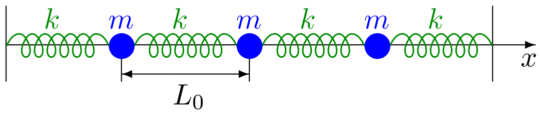
ii. Welche Symmetrien und Erhaltungssätze gibt es?

iii. Betrachten Sie eine Bewegung des Massenpunkts mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Welche Länge hat die Feder dabei?

iv. Betrachten Sie jetzt kleine Abweichungen von dieser Bewegung. Dann weicht die Länge der Feder um eine kleine Größe $\delta\ell(t)$ von der Länge aus Frage **iii.** ab. Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz der kleinen Schwingungen.

34. Kettenschwinger mit drei Massen

Ein Kettenschwinger besteht aus drei gleichen Massen (1,2,3), die durch Federn gleicher Stärke k untereinander und mit den Wänden verbunden sind. Die Federn seien bereits in der Gleichgewichtslage des Systems mit der Kraft F vorgespannt, wobei L_0 der Gleichgewichtsabstand der Massen sei.



Es wird angenommen, dass die Bewegung nur entlang der horizontalen x-Richtung stattfinden kann. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für solche „longitudinale" Schwingungen auf und lösen Sie sie.

*35. Freier Massenpunkt in rotierenden Koordinaten

Ein Massenpunkt m ruht im Punkt $(x\neq 0, y\neq 0, z=0)$ eines kartesischen Koordinatensystems in einem Inertialsystem. Zur Beschreibung seines Bewegungszustands werden verallgemeinerte Koordinaten

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases} \tag{4}$$

mit einer konstanten Zahl ω verwendet.

i. Drücken Sie x und y durch x' und y' aus und zeigen Sie, dass die (Standard) Lagrange-Funktion des Punkts

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\big) + \frac{m\omega^2}{2}\big(x'^2 + y'^2\big) - m\omega\big(\dot{x}'y' - \dot{y}'x'\big) \tag{5}$$

lautet.

Hinweis: Die Berechnung ist nicht kompliziert, erfordert aber ein wenig Geduld: ausgedrückt durch x', y' und ihre Ableitungen besteht $\dot{x}^2$ aus 10 Termen und $\dot{y}^2$ auch. Es wird daher empfohlen, die Schreibweisen $C \equiv \cos\omega t$, $S \equiv \sin\omega t$ (mit $C^2 + S^2 = 1$!) zu benutzen.

ii. Die Lagrange-Funktion (5) enthält nicht nur einen kinetischen Term, sondern auch ein Potential $V = -m\omega^2\big(x'^2 + y'^2\big)/2 + m\omega\big(\dot{x}'y' - \dot{y}'x'\big)$. Um die Bedeutung des letzteren nachzuvollziehen,[1] stellen Sie die Bewegungsgleichungen für x' und y' auf und vergleichen Sie sie mit der Gl. (1) der Aufgabe **12**: was erkennen Sie?

[1] Die Bedeutung lässt sich auch mit einigen Überlegungen finden.