Übung Nr.7

28. Lagrange-Funktionen

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für die folgenden Systeme und leiten Sie die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen ab:

i. Eine Perle, die reibungsfrei auf einer Helix (Schraubenlinie) mit Ganghöhe H und Radius R im Schwerefeld der Erde gleitet.

ii. Ein ebenes Doppelpendel (Abb. 1).

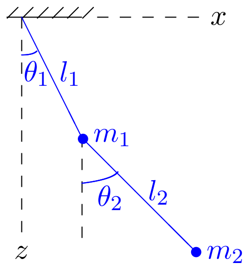


Abb. 1

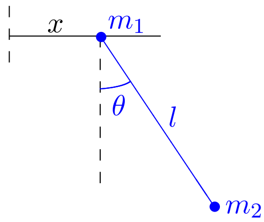


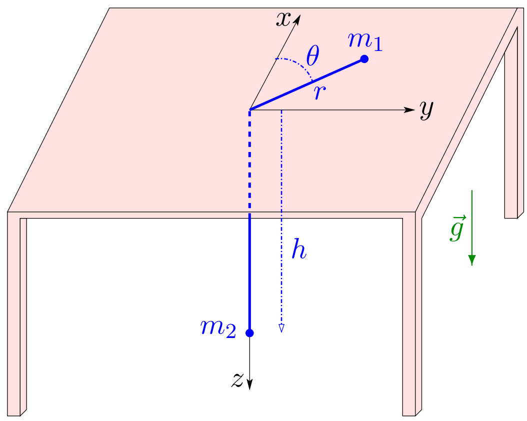
Abb. 2

iii. Ein ebenes Pendel mit der Masse m_2, dessen Aufhängepunkt mit der Masse m_1 sich entlang einer horizontalen Gerade bewegen kann (Abb. 2).

In **ii.** und **iii.** bestehen die Verbindungen aus masselosen Stäben.

29. Zwei-Massen-System

Zwei (Punkt)Massen m_1 und m_2 befinden sich an den Enden eines masselosen Fadens mit fester Länge $\ell = r + h$, der durch ein Loch in einem horizontalen Tisch durchläuft. Die Masse m_1 bleibt in der (x, y)-Ebene des Tischs, auf welchem sie sich reibungslos bewegen kann; die Masse m_2 bewegt sich nur entlang der vertikalen, nach *unten* gerichteten z-Achse. Das ganze System liegt im Schwerefeld $\vec{g}$.



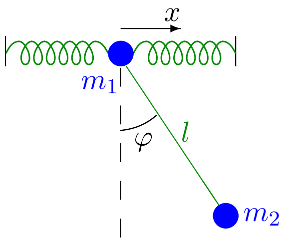
i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Bestimmen Sie eine Lagrange-Funktion für das System.

iii. Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Winkel θ und für die Höhe h auf.

30. Pendel an Federn

Eine Punktmasse m_1 ist durch zwei Federn an zwei Wänden befestigt. Beide Federn haben die gleiche Federkonstante k und ihre Ruhelänge entspricht gerade dem Fall, dass sich m_1 in der Mitte zwischen den Wänden befindet. Die Punktmasse m_1 darf sich nur entlang der horizontalen x-Achse bewegen.
Eine zweite Punktmasse m_2 ist am Ende eines masselosen Stabs der Länge l, der selbst an m_1 aufgehängt ist. Diese Punktmasse kann in der (x, y)-Ebene unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes schwingen. Sei φ der Auslenkungswinkel des Pendels.



i. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

ii. Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2 und drücken Sie die kinetischen und potentiellen Energien der Punktmassen dadurch aus. Geben Sie die Lagrange-Funktion an.

iii. Leiten Sie zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen ab.

iv. Sei nun angenommen, dass der Auslenkungswinkel φ klein ist.

a) Zeigen Sie, dass sich beide Bewegungsgleichungen jeweils in der Form

$$a_i \ddot{q}_i(t) + b_i q_i(t) = f_i\big(q_j(t), \dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t)\big)$$

schreiben lassen, mit a_i und b_i konstanten Koeffizienten, während $q_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$ die eine und $q_j(t)$ die andere generalisierte Koordinate ist.

b) (Bonusfrage: entwickeln Sie Ihre mathematische „Intuition"…) Können Sie argumentieren, welcher Term die Lösung der in **a)** gefundenen gekoppelten Gleichungen besonders erschwert.

*31. Bewegungsgleichungen in sphärischen Koordinaten

In der Aufgabe **25.** haben Sie die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten eines Massenpunkts in Anwesenheit eines Potentials $V(r, \theta, \phi)$ hergeleitet.

Sei jetzt angenommen, dass das Potential kugelsymmetrisch ist — d.h. $V(r)$ hängt nur vom Abstand r zum Nullpunkt ab —, und dass die Bewegung durch eine Zwangskraft so eingeschränkt wird, dass der Massenpunkt auf einer Kegeloberfläche $\theta = \theta_0$ bleiben muss.

i. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem auf.

ii. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die Radialbewegung sich in der Form

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{\partial V_{\text{eff}}\big(r(t)\big)}{\partial r}$$

umschreiben lässt. Wie lautet das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$?

iii. Was ist der physikalische Inhalt der anderen Bewegungsgleichung? Erkennen Sie dabei eine Ihnen bekannte Größe.