Übung Nr.6

23. Minimale Wirkung für einen Massenpunkt im Schwerefeld

Die Lagrange-Funktion für die eindimensionale Bewegung eines Massenpunkts im Schwerefeld $-g\,\vec{e}_z$ lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz. \tag{1}$$

Berechnen Sie das entsprechende Wirkungsintegral $S[z(t)]$ zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 0$ und $t_2 > 0$ für eine Bahnkurve $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + f(t)$. Dabei ist f eine stetig differenzierbare Funktion, die am Rand verschwindet: $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Zeigen Sie, dass die Wirkung S minimal für $f(t) = 0$ ist.

24. Lagrange-Funktionen

In dieser Aufgabe bezeichnet $\vec{E}$ einen konstanten Vektor und q eine reelle Zahl.

i. Sei $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + q\vec{E}\cdot\vec{x}$ eine Lagrange-Funktion. Wie lautet die zugehörige (vektorielle) Bewegungsgleichung? Welches physikalische System beschreibt die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}_1$?

ii. Sei nun $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\vec{E}\cdot\dot{\vec{x}}t$ eine zweite Lagrange-Funktion. Wie lautet die zugehörige Bewegungsgleichung? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

25. Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten

Sei $\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$ die Bahnkurve eines Massenpunkts, parametrisiert mithilfe kartesischer Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Eine entsprechende Parametrisierung durch *sphärische* oder *Kugelkoordinaten* $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ wird definiert durch

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t), \quad z(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{2}$$

Die zugehörigen Basisvektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ werden durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta(t) + r(t)\sin\theta(t)\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t) \tag{3}$$

definiert.

i. Drücken Sie $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ durch $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ aus. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\big(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_\varphi(t)\big)$ auf 1 normiert sind und ein orthogonales Rechtssystem bilden.

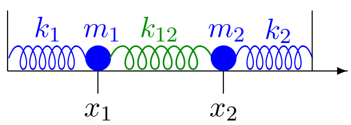
ii. Wir wollen den Lagrange-Formalismus verwenden, um die Bewegungsgleichungen eines Massenpunkts in Anwesenheit eines Potentials $V(r,\theta,\phi)$ in sphärischen Koordinaten herzuleiten.

a) Drücken Sie die kinetische Energie des Massenpunkts durch r, θ, φ und ihre Zeitableitungen aus.

b) Benutzen Sie die Euler–Lagrange-Gleichungen bezüglich der Kugelkoordinaten, um die gesuchten Bewegungsgleichungen zu schreiben.

26. Gekoppelte harmonische Oszillatoren

Zwei harmonische Oszillatoren mit jeweiligen Federkonstanten k_1, k_2 und Massen m_1, m_2 seien harmonisch gekoppelt, d.h. mit einer weiteren Feder (Federkonstante k_{12}) an einander gebunden. Die Schwingungen erfolgen alle entlang einer Geraden, und die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren jeweiligen Ruhelagen werden mit x_1 und x_2 bezeichnet.



i. Wie lautet die „Standard“ Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ für dieses System?

Hinweis: Die potentielle Energie besteht aus drei Beiträgen: V_1, V_2 (für die individuellen Oszillatoren) und V_{12} (für ihre Wechselwirkung).

ii. Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auf.

iii. Sei jetzt angenommen, dass die zwei Oszillatoren identisch sind: $m_1 = m_2 \equiv m$, $k_1 = k_2 \equiv k$. Führen Sie $X(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)]$ und $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ ein. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $X(t)$ und $x(t)$? Geben Sie die allgemeinen Lösungen für $X(t)$ und $x(t)$ an. Folgern Sie daraus die allgemeinen Lösungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

*27. Form-Invarianz der Euler–Lagrange-Gleichungen

Sei eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)$ von s verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = \{q_a\}$ und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_a\}$. Betrachte man die Transformation

$$q_a \to q'_a = q'_a\big(t, \{q_b\}\big) \quad \text{für } a = 1, \ldots, s, \tag{4a}$$

wie z.B. bei einem Koordinatenwechsel $(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$. Dabei soll die Transformation ein *Diffeomorphismus* sein, d.h. eine beliebig oft differenzierbare ($\mathscr{C}^\infty$) bijektive Abbildung, deren Umkehrfunktion

$$q_a = q_a\big(t, \{q'_b\}\big) \quad \text{für } a = 1, \ldots, s \tag{4b}$$

auch $\mathscr{C}^\infty$ ist.

i. Drücken Sie die verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}'_a$ durch die $\{\dot{q}_b\}$ und die partiellen Ableitungen von q'_a aus.

Hinweis: $\dot{q}'_a$ ist die *totale* Zeitableitung von q'_a; dabei sollen die Variablen $\{q_b\}$ als möglicherweise zeitabhängig betrachtet werden.

ii. Drücken Sie nun $\dot{q}_a$ durch die $\{\dot{q}'_b\}$ und die partiellen Ableitungen von q_a aus der Rückkehrtransformation (4b) aus. Folgern Sie daraus die Gleichheiten

$$\frac{\partial \dot{q}'_a}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial q'_a}{\partial q_b} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial \dot{q}'_b} = \frac{\partial q_a}{\partial q'_b} \tag{5}$$

für alle $a, b \in \{1, \ldots, s\}$.

iii. Betrachte man nun die transformierte Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}'\big(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}'\big) \equiv \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}(t, \mathbf{q}'), \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}')\big). \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \{1, \ldots, s\}$ die transformierte Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}'\big(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}'\big)}{\partial q'_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'\big(t, \mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}'\big)}{\partial \dot{q}'_a}\right) \tag{7}$$

gilt, wenn die Gleichungen $\dfrac{\partial \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)}{\partial q_b} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)}{\partial \dot{q}_b}\right)$ für alle $b = 1, \ldots, s$ erfüllt sind.

Somit erhalten die Euler–Lagrange-Gleichungen die gleiche Form (unter Nutzung der transformierten Lagrange-Funktion (6)) unter beliebigen Transformationen (4a) der verallgemeinerten Variablen.