Übung Nr.5

19. Zentralkraftproblem (1)

In Zentralkraftproblemen ist der Drehimpuls $\vec{\ell}$ erhalten, so dass die Bahnkurven in einer auf $\vec{\ell}$ senkrechten Ebene bleiben. Sei $\big(r(t), \theta(t)\big)$ die Parametrisierung einer solchen Bahnkurve, und zwar für die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse μ in einem Potential $V\big(|\vec{r}|\big)$, wobei $r(t)$ bzw. $\theta(t)$ den Abstand vom Kraftzentrum bzw. den Winkel relativ zu einer festen Richtung bezeichnet.

i. Drücken Sie den Betrag ℓ des Drehimpulses und die Gesamtenergie E des Massenpunkts durch $r(t)$, $\theta(t)$ und ihre Zeitableitungen aus. Zeigen Sie, dass sich E in der Form

$$E = \frac{\ell^2}{2\mu r^4}\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right] + V(r) \tag{1}$$

schreiben lässt.

ii. Unter dem Einfluss eines Zentralkraftfeldes $\vec{F}\big(\vec{r}\big) = -\vec{\nabla}V(r) = f(r)\,\vec{e}_r$ beschreibt ein Massenpunkt die Bahnkurve (in Polarkoordinaten) $r(\theta) = 2a\cos\theta$ mit einer konstanten Zahl $a > 0$.

a) Zeigen Sie, dass diese Bahnkurve ein Kreis ist.

b) Geben Sie das Kraftgesetz $\vec{F}\big(\vec{r}\big) = f(r)\,\vec{e}_r$ an.

Hinweis: Benutzen Sie Gl. (1), abgeleitet nach r.

iii. Jetzt ist die Bahnkurve des Massenpunkts eine Spiralbahn $r(\theta) = a\,\mathrm{e}^{\theta}$ mit $a > 0$. Was ist das entsprechende Kraftgesetz?

iv. Gleiche Frage wie **ii.b** und **iii.**, jetzt für die Bahnkurve $r(\theta) = a\tanh(\theta/\sqrt{2})$ mit $a > 0$, wobei $\tanh(x) \equiv \sinh(x)/\cosh(x)$ den Tangens Hyperbolicus bezeichnet.

Hinweis: Die Ableitung $\tanh'(x)$ kann durch $\tanh(x)$ ausgedrückt werden.

Diese Aufgabe zeigt, dass das Kraftgesetz aus der Bahnkurve rekonstruiert werden kann. Somit wusste Newton (dank Kepler), dass die Bahnkurven der Planeten Ellipsen $r(\theta) = p/(1 + \epsilon\cos\theta)$ sind, woraus er „sein“ Gravitationsgesetz herleiten konnte...

20. Isotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\ell = |\vec{\ell}|$ im Zentralpotential $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ mit $k > 0$. Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie seinen Verlauf und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahnkurve des Massenpunkts qualitativ.

21. Lenz-Vektor und Kepler-Problem

Wir betrachten das Kepler-Problem mit dem Potential $V(r) = -\alpha/r$ im üblichen Koordinatensystem mit mitbewegten Basisvektoren $\big(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t), \vec{e}_z\big)$, wobei $\vec{e}_z$ senkrecht auf der Ebene der Bahnkurve steht.

i. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse μ im Potential $V(r)$ in der Form einer Erhaltungsgleichung $\mathrm{d}\vec{B}(t)/\mathrm{d}t = \vec{0}$ umgeschrieben werden kann, wobei der erhaltene Vektor durch

$$\vec{B}(t) = \frac{\ell}{\alpha}\vec{v}(t) - \vec{e}_\theta(t) \tag{2}$$

gegeben ist. Dabei ist ℓ der Betrag des Drehimpulses $\vec{\ell}$ des Massenpunkts.

Hinweis: Drücken Sie $\mathrm{d}\vec{e}_\theta(t)/\mathrm{d}t$ durch $\vec{e}_r(t)$ und $\dot{\theta}(t)$ aus und benutzen Sie die Beziehung zwischen $\dot{\theta}(t)$ und ℓ.

ii. Folgern Sie daraus, dass der (Laplace–Runge–Lenz-)Vektor

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\alpha}\vec{\ell} \times \vec{v}(t) + \vec{e}_r \tag{3}$$

ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

iii. Zeigen Sie, dass die in Gl. (2)–(3) definierten Vektoren der Gleichung

$$\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}$$

genügen, wobei $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$ die Gesamtenergie des Massenpunkts ist.

iv. Bilden Sie das Skalarprodukt aus $\vec{A}$ und dem Ortsvektor $\vec{x}(t)$ des Massenpunkts. Indem Sie $\epsilon \equiv |\vec{A}|$ und $p \equiv \ell^2/\mu\alpha$ definieren und den Winkel θ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{A}$ einführen, was erkennen Sie?

*22. Zentralkraftproblem (2)

Ein Massenpunkt der Masse μ bewege sich mit der Energie E und dem Drehimpuls $\ell = |\vec{\ell}|$ im Zentralpotential $V(r) = -\alpha/r^2$ mit $\alpha > 0$.

i. Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$. Skizzieren Sie seinen Verlauf und diskutieren Sie anhand Ihrer Skizze die Bahnkurve des Massenpunkts qualitativ. Es gibt insgesamt drei verschiedene physikalisch sinnvolle Fälle für E und ℓ. Welche?

ii. Stellen Sie die Gleichung für $r(t)$ auf und berechnen Sie $t(r)$. Bei geeigneter Wahl des Nullpunkts von t erhalten Sie

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{\ell^2}{2\mu} + \alpha}.$$

Unter welchen Umständen fällt ein Massenpunkt von einem Abstand r_0 ins (Kraft)Zentrum? Wenn er das tut, wie lange braucht er dafür?

iii. Stellen Sie die Gleichung für den Winkel θ auf und berechnen Sie $\theta(r)$.