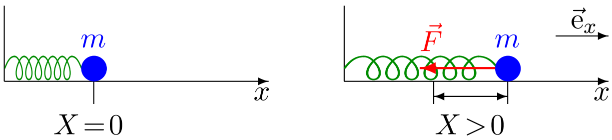
Übung Nr.4

15. Harmonischer Oszillator

Ein oft verwendetes Modell der theoretischen Physik ist jenes des *harmonischen Oszillators*. Das anschaulichste Anwendungsbeispiel ist die Modellierung der Kraft, die durch eine Feder auf eine Masse ausgeübt wird: sei angenommen, dass die Feder längs der x-Achse gerichtet ist, und dass sich die Masse nur entlang dieser Richtung bewegen kann. Wenn X die Auslenkung der Masse aus ihrer Ruhelage bezeichnet, dann übt die Feder die Kraft $\vec{F} = -kX\,\vec{e}_x$ auf die Masse aus, wobei $k > 0$ die Federkonstante ist.



i. Bewegungsgleichung

Vernachlässigen Sie die Schwerkraft auf die Masse (m)[1] und stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Position der Masse auf. Wie lautet die allgemeine Lösung zu dieser Gleichung? Warum spricht man von einem „harmonischen Oszillator“?

Hinweis: Sie dürfen den Nullpunkt $x = 0$ der x-Achse in der Ruhelage $X = 0$ der Masse nehmen, und ab jetzt X durch x im Ausdruck der Kraft ersetzen.

ii. Potential

Aus welchem Potential $V(\vec{r})$ lässt sich die Kraft ableiten?

iii. Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Der harmonische Oszillator der Fragen **i.** und **ii.** ist eindimensional — seine Bewegung ist auf eine einzige Dimension eingeschränkt. Können Sie das Ergebnis aus **ii.** verallgemeinern, und das Potential für einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator schreiben? Wie lautet die zugehörige Kraft?

16. Coulomb-Potential

Sei ein System aus Punktladungen mit elektrischen Ladungen $\{q_a\}$. Die Coulomb-Kraft, welche die b-te Punktladung auf die a-te ausübt, ist

$$\vec{F}_{b\to a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^2}\,\vec{e}_{ba},$$

wobei $\vec{e}_{ba} \equiv (\vec{r}_a - \vec{r}_b)/|\vec{r}_a - \vec{r}_b|$ den Einheitsvektor entlang des Abstandsvektors der beiden Punktladungen bezeichnet.

Warum ist diese Kraft konservativ? Bestimmen Sie die zugehörige potentielle Energie V_{ab}, definiert durch $\vec{F}_{b\to a} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}$.

17. Sätze von König

Sei Σ ein Mehrteilchensystem mit Gesamtmasse M und $\mathcal{B}^*_\Sigma$ das zugehörige Schwerpunktsystem (in welchem der Gesamtimpuls $\vec{P}^*(t)$ des Systems Null ist). Der Gesamtdrehimpuls bzw. die gesamte kinetische Energie von Σ relativ zu $\mathcal{B}^*_\Sigma$ wird mit $\vec{L}^*(t)$ bzw. $T^*(t)$ bezeichnet.

Sei $\mathcal{B}$ ein Bezugssystem, das relativ zu $\mathcal{B}^*_\Sigma$ *nicht* rotiert. Mit $\vec{P}(t)$, $\vec{L}(t)$ und $T(t)$ werden der Gesamtimpuls, der Gesamtdrehimpuls und die gesamte kinetische Energie des Mehrteilchensystems bezüglich

[1] Eigentlich sorgt eine *Zwangskraft*, die der Schwerkraft entgegenwirkt, dafür, dass die Masse auf der x-Achse bleibt: die Resultierende aus Zwangs- und Schwerkraft ist Null.

$\mathcal{B}$ bezeichnet, während $\vec{X}(t)$ die Bahnkurve des Schwerpunkts von Σ relativ zu $\mathcal{B}$ ist. Beweisen Sie die beiden Sätze von König, und zwar

i. 1. Satz von König $\vec{L}(t) = \vec{L}^*(t) + \vec{X}(t) \times \vec{P}(t)$;

ii. 2. Satz von König $T(t) = T^*(t) + \dfrac{\vec{P}(t)^2}{2M}$.

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Sätze?

*18. Virialsatz

Sei ein System Σ aus N Teilchen, die nur konservativen Kräften unterliegen. Wie in der Vorlesung werden die Massen bzw. Bahnkurven der Teilchen mit m_a bzw. $\vec{x}_a(t)$ bezeichnet. Sei T bzw. V die gesamte kinetische bzw. potentielle Energie von Σ. Die Gesamtkraft auf Teilchen a ist somit $-\vec{\nabla}_a V$.

i. Drücken Sie die Summe $\displaystyle\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t^2} \cdot \vec{x}_a(t)$

a) durch das Potential V — genauer, durch dessen Gradienten — und die Bahnkurven $\vec{x}_a(t)$ aus;

b) durch die kinetische Energie T, die Bahnkurven und die Geschwindigkeiten der Teilchen aus.

Hinweis: Berechnen Sie dafür zunächst die Zeitableitung des Produkts $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t)$.

ii. Virialsatz

Der zeitliche Mittelwert einer beliebigen Funktion $f(t)$ wird als

$$\langle f \rangle_t \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$$

definiert, wobei angenommen wird, dass der Limes des Integrals existiert.

a) Sei angenommen, dass das Produkt $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t)$ nie unendlich wird. Zeigen Sie, dass

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{a=1}^{N} m_a \frac{\mathrm{d}\vec{x}_a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{x}_a(t)\right]\right\rangle_t = 0.$$

b) Indem Sie die in Fragen **i.a)** und **i.b)** gefundenen Ausdrücke gleich setzen und über die Zeit mitteln, beweisen Sie den *Virialsatz*

$$2\,\langle T \rangle_t = \left\langle \sum_{a=1}^{N} \big(\vec{\nabla}_a V\big) \cdot \vec{x}_a(t) \right\rangle_t. \tag{1}$$

iii. Spezialfälle

Jetzt wird angenommen, dass es keine äußeren Kräfte auf das System gibt, und dass die inneren Zweikörperkräfte sich aus Potentialen $V_{ab}\big(|\vec{r}_b - \vec{r}_a|\big) = \alpha_{ab}|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha_{ab} \in \mathbb{R}$ ableiten lassen.

a) Zeigen Sie zunächst die Identitäten $\vec{\nabla}_a|\vec{r}_b - \vec{r}_a| = -\dfrac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$ und $\dfrac{\mathrm{d}V_{ab}}{\mathrm{d}|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} = n\dfrac{V_{ab}}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$.

b) Folgern Sie daraus, dass sich der Virialsatz (1) zu $2\,\langle T \rangle_t = n\,\langle V \rangle_t$ vereinfacht.

c) Wie lautet der Virialsatz für Körper, die über das newtonsche Gravitationspotential wechselwirken?

d) Wie lautet der Virialsatz für gekoppelte harmonische Oszillatoren mit $V_{ab} = \frac{1}{2}k_{ab}|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^2$.

Kannten Sie schon im Fall $N = 1$ ein ähnliches Ergebnis?