Übung Nr.3

10. Sphärische Koordinaten

i. Wie lassen sich sphärische Koordinaten (= Kugelkoordinaten) mit Hilfe von kartesischen Koordinaten darstellen?

ii. Wie lautet die Umkehrtransformation?

iii. Stellen Sie sich vor, ein Fahrzeug fährt auf der Erdoberfläche entlang des nullten Längengrades vom Nordpol zum Südpol mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber der Erde (genauer soll der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleiben). Die Erde wird dabei als Kugel mit dem Radius R_{E} betrachtet. Wie kann man diese Bewegung in kartesischen Koordinaten und wie in Kugelkoordinaten darstellen?

11. Rutschbahn

In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und drei volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem.

Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.

12. Freier Fall in einem rotierenden Bezugssystem

Ein Karussell dreht sich um eine vertikale Achse (z-Achse) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\mathrm{e}}_z$ relativ zu einem Inertialsystem. Seien $\mathcal{B}'$ ein Bezugssystem, das mit dem Karussell mitrotiert, und (x, y, z) die Koordinaten eines relativ zu $\mathcal{B}'$ festen kartesischen Koordinatensystems.

Das Karussell befindet sich in einem homogenen Schwerefeld $\vec{g} = -g\,\vec{\mathrm{e}}_z$. Eine Punktmasse m fällt aus einer Höhe h relativ zum Boden (bei $z = 0$) des Karussells. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Bewegung der Punktmasse im Bezugssystem $\mathcal{B}'$ zu untersuchen. Am Anfang des Falls (Zeitpunkt $t = 0$) ist die Punktmasse im Abstand $r_0 > 0$ der Rotationsachse, mit $x(t{=}0) = r_0$, $y(t{=}0) = 0$. Zur Zeit $t = 0$ ruht die Punktmasse relativ zu $\mathcal{B}'$.

i. Zeigen Sie, dass die Bahnkurve der Punktmasse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \omega^2\,x(t) + 2\omega\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = \omega^2\,y(t) - 2\omega\dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt. Folgern Sie daraus $z(t)$ für $t \geq 0$.

ii. Prüfen Sie (können Sie es zeigen?), dass die Lösungen $x(t)$, $y(t)$ durch

$$x(t) = r_0\big(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t\big), \quad y(t) = r_0\big(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t\big) \tag{2}$$

gegeben sind. Nehmen Sie an, dass $\omega t \ll 1$ (was gültig bleibt, solange die Dauer des Falls viel kürzer als die Periodendauer der Rotation des Karussells ist) und entwickeln Sie $x(t)$, $y(t)$ bis zur 2. Ordnung in ωt. Wie sieht die Bahnkurve in dieser Näherung aus? Welche Kraft spielt zu dieser Ordnung in ωt keine Rolle mehr?

13. Kegelschnitte

(Diese Aufgabe ist zwar rein mathematisch. Das Interesse liegt daran, dass die Bahnkurven des Kepler-Problems Kegelschnitte sind.)

i. Zeigen Sie, dass die in Polarkoordinaten definierte Kurve $r = p/(1 + \epsilon \cos\varphi)$ für $\epsilon \neq 1$ in geeignet gewählten kartesischen Koordinaten durch

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden kann, mit $a, b > 0$, wobei das obere bzw. untere Vorzeichen dem Fall $0 < \epsilon < 1$ bzw. $\epsilon > 1$ entspricht. Geben Sie a und b als Funktionen von p und ϵ an.

ii. Prüfen Sie, dass die Kurve mit $0 < \epsilon < 1$ bzw. $\epsilon > 1$ eine Ellipse bzw. eine Hyperbel beschreibt.

iii. Überprüfen Sie, dass man im Grenzfall $\epsilon = 1$ die bekannte Definition einer Parabel in kartesischen Koordinaten erhält.

*14. Allgemeine Galilei-Transformationen

Eine allgemeine Galilei-Transformation $\mathcal{G}(\tau, \vec{b}, \mathscr{R}, \vec{u})$ zwischen zwei Inertialsystemen lautet

$$t' = t - \tau, \qquad \vec{r}\,' = \mathscr{R}\big(\vec{r} - \vec{u}t - \vec{b}\big), \tag{3}$$

wobei die Zeitverschiebung τ, die Verschiebung $\vec{b}$, die Drehmatrix $\mathscr{R}$ und die Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ konstant sind.

Betrachten Sie zwei Galilei-Transformationen $\mathcal{G}(\tau, \vec{b}, \mathscr{R}, \vec{u})$ und $\mathcal{G}(\tau', \vec{b}\,', \mathscr{R}', \vec{u}\,')$. Berechnen Sie die Transformation, die sich ergibt, wenn beide hintereinander ausgeführt werden. Folgern Sie daraus die Inverse einer allgemeinen Galilei-Transformation.