Übung Nr.2

5. Konservative Kraftfelder (1)

i. Erklären Sie den Unterschied zwischen den Kraftfeldern $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}$ und $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$.

ii. Beweisen Sie, dass das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ konservativ ist.

iii. Berechnen Sie das Potential für $f(r) = -\alpha r^2$. Im Koordinatenursprung soll das Potential null sein.

6. Konservative Kraftfelder (2)

i. Ist das folgende für $r \neq 0$ definierte (in Kugelkoordinaten gegebene) Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an (μ ist eine Konstante).

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r^2}(1 + \mu r)\vec{\mathrm{e}}_r. \tag{1}$$

ii. Ist das folgende außer auf der z-Achse definierte Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an. (Hinweis: Betrachten Sie die Arbeit entlang eines Weges, der die z-Achse umschließt.)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

iii. $\vec{a}$, $\vec{b}$ seien konstante Vektoren. Welche Bedingungen müssen diese erfüllen, damit das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \big(\vec{a} \cdot \vec{r}\big)\vec{b}$ konservativ ist?

7. Nabla-Operator

Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{r}$.

8. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Bewegungsgleichung für einen gedämpften 1-dimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$m\ddot{x} + \alpha_{\mathrm{R}}\dot{x} + m\Omega^2 x = 0.$$

i. Lösen Sie diese für vorgegebene Anfangswerte x_0 und v_0 für x und $\dot{x}$ zur Zeit $t = 0$.

ii. Diskutieren Sie die beiden Fälle $\alpha_{\mathrm{R}}/2m < \Omega$ (Schwingfall) und $\alpha_{\mathrm{R}}/2m > \Omega$ (Kriechfall). Skizzieren Sie für jeden dieser Fälle eine typische Trajektorie $x(t)$.

iii. Wie lautet die Lösung im Grenzfall $\alpha_{\mathrm{R}}/2m \to \Omega$? (Hinweis: Drücken Sie zunächst die Lösung für den Schwingfall durch Cosinus- und Sinus-Funktionen aus, und betrachten Sie dann diesen Grenzfall.)

*9. Eindimensionale Bewegung mit Reibungskraft

(Eine Lösung zu dieser Aufgabe wird am 25.10 auf die Webseite der Vorlesung hochgeladen.)

Ein Körper bewege sich in einer Dimension unter dem Einfluss der Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(v)$ nach folgender Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} = F_{\mathrm{R}}(v), \quad v \geq 0. \tag{3}$$

Die Reibungskraft $F_{\mathrm{R}}(v)$ ist durch zwei positive Parameter charakterisiert, die Haftreibung H und den

Reibungskoeffizienten γ; sie hat die Form

$$F_{\mathrm{R}}(v) = -H\left[1 + \left(\frac{\gamma v}{H}\right)^n\right]^{1/n}. \tag{4}$$

Die Frage **ii)** ist unabhängig von **i)**.

i. Verhalten der Reibungskraft

a) Bestimmen Sie den Grenzwert von $F_{\mathrm{R}}(v)$ für $v \to 0$ sowie das asymptotische Verhalten für $v \to \infty$.

b) Wie verhält sich die Reibungskraft für $n \to \infty$?

c) Skizzieren Sie den Verlauf von $F_{\mathrm{R}}(v)$ für $n = 2$ und $n \to \infty$.

ii. Im weiteren sei $n = 2$.

a) Geben Sie die Lösung $v(t)$ der Bewegungsgleichung (3). Trennen Sie dazu die Variablen und verwenden Sie Hyperbelfunktionen.
Machen Sie sich vorher die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen klar.[1] Zeigen bzw. ermitteln Sie:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{5}$$

$$\sinh(x+y) = ? \quad , \quad \cosh(x+y) = ? \tag{6}$$

$$\sinh'(x) = ? \quad , \quad \cosh'(x) = ? \tag{7}$$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = ? \quad , \quad \operatorname{arcosh}'(x) = ? \tag{8}$$

Stellen Sie die Umkehrfunktionen mittels des natürlichen Logarithmus ln dar.

b) Bestimmen Sie die Stoppzeit und stellen Sie diese als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit graphisch dar.

c) Bestimmen Sie die Wegstrecke, auf der ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Stehen kommt.

[1] Zur Erinnerung(?) gelten $\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.