Übung Nr.15

65. Elektrisches Feld aus Strömen

Die stationären elektrischen Felder $\vec{E}(\vec{r})$ der Elektrostatik sind verursacht durch statische Punktladungen mit Ladungsverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$. Sie werden hiernach zeigen, dass es auch möglich ist, ein zeitunabhängiges elektrisches Feld durch eine geeignete Stromverteilung $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ in Abwesenheit einer Ladungsverteilung zu erzeugen.

i. Sei $\vec{\jmath}_{\text{el.},0}(\vec{r})$ eine stationäre Stromdichte und $\vec{B}_0(\vec{r})$ die entsprechende magnetische Induktion, wobei $\rho_{\text{el.},0}(\vec{r}) = 0$ und somit $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{0}$. Eine zeitabhängige Stromverteilung sei durch $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = \vec{\jmath}_{\text{el.},0}(\vec{r})\, t/\tau$ beschrieben, mit τ einer Konstante.

a) Zeigen Sie, dass das elektromagnetische Feld bestehend aus $\vec{B}(t,\vec{r}) \equiv \vec{B}_0(\vec{r})\, t/\tau$ und einem zu bestimmenden stationären elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r})$ die Maxwell-Gleichungen mit Quellen $\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = 0$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r})$ erfüllt.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, dass $\vec{B}_0(\vec{r})$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.},0}(\vec{r})$ den stationären Maxwell-Gleichungen genügen.

b) Wodurch unterscheidet sich das gefundene Feld $\vec{E}(\vec{r})$ von einem elektrostatischen Feld (erzeugt durch eine statische Ladungsverteilung)?

ii. Zeigen Sie, dass das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ die gleiche Struktur hat wie das stationäre magnetische Feld $\vec{B}_1(\vec{r})$ erzeugt durch eine zu bestimmende zeitunabhängige Stromverteilung $\vec{\jmath}_{\text{el.},1}(\vec{r})$, die sich durch $\vec{B}_0$ und τ ausdrücken lässt.

66. Sphärische Wellen

Für eine kugelsymmetrische skalare Funktion $f(r)$ mit $r \equiv |\vec{r}|$ gilt

$$\triangle f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\,\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big[r f(r)\big].$$

Bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösung $u(t,r)$ der klassischen Wellengleichung

$$\triangle u(t,r) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Hinweis: Die letzte angegebene Formel für den Laplace-Operator ist hier (wie oft) die günstigste.

67. Eichtransformationen

Seien $\rho_{\text{el.}}$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ die Ladungs- und Stromdichten, die ein gegebenes elektromagnetisches Feld $\vec{E}$, $\vec{B}$ erzeugen. In der Vorlesung wurden die sog. retardierten Potentiale

$$\Phi_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_{\text{el.}}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,', \qquad \vec{A}_{\text{ret.}}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{2}$$

eingeführt.

i. Welche Eichbedingung erfüllen diese Potentiale? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Sei $\Phi(t,\vec{r})$ ein anderes Skalarpotential für die gleichen Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$. Zeigen Sie, dass die „Eichfunktion" $\chi(t,\vec{r})$, die in der Eichtransformation (aus **i.**) von $\Phi_{\text{ret.}}$ nach Φ auftritt, durch

$$\chi(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t}\big[\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t' \tag{3a}$$

gegeben ist. Folgern Sie daraus, dass das zugehörige Vektorpotential formell

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{A}_{\text{ret.}}(-\infty,\vec{r}) - \int_{-\infty}^{t} \big[\vec{E}(t',\vec{r}) + \vec{\nabla}\Phi(t',\vec{r})\big]\,\mathrm{d}t' \tag{3b}$$

lautet. (Dafür brauchen Sie $\vec{E}$ *nicht* zu bestimmen.)

*68. Ebene elektromagnetische Welle

Eine linear polarisierte ebene Welle ist definitionsgemäß eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit elektromagnetischen Potentialen der Form

$$\Phi(t,\vec{r}) = \lambda c f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \qquad \vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{\varepsilon} f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \tag{4}$$

mit λ und ω bzw. $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{k}$ zeit- und ortsunabhängigen reellen Zahlen bzw. Vektoren und f einer skalaren Funktion.

Zur Erinnerung gelten für beliebige f_1, f_2, $\vec{g}$ die Identitäten

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\big[f_1(\vec{r})f_2(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]f_2(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}f_2(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\cdot\big[f_1(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]\cdot\vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{r}) \\
\vec{\nabla}\times\big[f_1(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})\big] &= \big[\vec{\nabla}f_1(\vec{r})\big]\times\vec{g}(\vec{r}) + f_1(\vec{r})\vec{\nabla}\times\vec{g}(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Die Formel für das doppelte Kreuzprodukt ist $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

i. Wie lauten die zugehörigen Felder $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$?
Hinweis: $\vec{\nabla}f(\vec{k}\cdot\vec{r}) = \vec{k}f'(\vec{k}\cdot\vec{r})$ mit f' der Ableitung von f.

ii. Rechnen Sie nach, dass die Transformation

$$\lambda \to \lambda' \equiv \lambda + \alpha\frac{\omega}{c}, \qquad \vec{\varepsilon} \to \vec{\varepsilon}' \equiv \vec{\varepsilon} + \alpha\vec{k}$$

mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Eichtransformation ist.

iii. Geben Sie den Ausdruck der „inhomogenen" Maxwell-Gleichungen[1] im Vakuum für die Welle (4) in Abhängigkeit von der Funktion f bzw. von deren Ableitungen an. Zeigen Sie insbesondere, dass diese Gleichungen zu den folgenden Beziehungen führen

$$\lambda\vec{k}^2 = \frac{\omega}{c}\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\left(\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda c}{\omega}\vec{k}\right) = \vec{0}.$$

iv. Zeigen Sie anhand der Ergebnisse aus **iii.**, dass die Lösungen der Form (4) für $\omega^2 \neq c^2\vec{k}^2$ sogenannte „reine Eichungen" sind, d.h. sie können durch eine Eichtransformation in $\Phi'(t,\vec{r}) = 0$, $\vec{A}'(t,\vec{r}) = 0$ wegtransformiert werden.

v. Sei nunmehr $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$.

a) Benutzen Sie ein Ergebnis aus **iii.**, um zu zeigen, dass die Potentiale (4) der Lorenz-Eichbedingung automatisch genügen (obwohl die Eichung noch nicht fixiert wurde).

b) Für ein Feld, das keine reine Eichung ist, gilt $\lambda^2 < \vec{\varepsilon}^2$.
Zeigen Sie, dass es möglich ist, durch eine Eichtransformation $\lambda = 0$ anzusetzen. Welcher Eichung entspricht diese Bedingung? Überprüfen Sie, dass man die bekannten Eigenschaften von $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ für eine transversal polarisierte ebene Welle erhält.

[1]... die hier homogen sind, weil es keine Quellterme gibt!