Übung Nr.14

60. Magnetfeld einer idealen Zylinderspule

In der Vorlesung wurde das Magnetfeld einer Leiterschleife auf der Achse der Schleife berechnet. Eine Zylinderspule (Länge ℓ, Radius R) sei als eine Reihenfolge von N kreisförmigen Leiterschleifen mit Radius R modelliert, die alle durch die Stromstärke I durchflossen sind. Die x-Achse liegt entlang der Symmetrieachse der Zylinderspule, mit $x = 0$ in der Mitte der Spule.

i. Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ in einem Punkt auf der x-Achse innerhalb der Spule.

ii. Zeigen Sie anhand einer Taylor-Entwicklung, dass das Ergebnis aus **i.** im Limes $\ell \gg R$ zu

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \tag{1}$$

führt, unabhängig vom Radius R und von der Position x auf der Achse der Spule.

61. Ein Theorem der Vektoranalysis

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left[\int \frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right] - \vec{\nabla}\left[\int \frac{Q(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\right]$$

die Bedingungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) = Q(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r}) = \vec{W}(\vec{r})$ erfüllt. Welche Sonderfälle dieser Formel haben Sie in der Vorlesung gesehen?

62. Plattensender

Ein „Plattensender“ erzeugt rechts und links der Ebene $x = 0$ das elektrische Feld

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = E_0[\Theta(x)\cos(kx - \omega t) + \Theta(-x)\cos(kx + \omega t)]\vec{\mathrm{e}}_y. \tag{2}$$

Dabei ist $\Theta(x)$ die Stufenfunktion (Heaviside-Funktion) und $\omega = ck$.

i. Zeigen Sie, dass dieses Feld die Maxwell–Gauß-Gleichung im ladungsfreien Bereich $x \neq 0$ erfüllt.

ii. Geben Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld $\vec{B}(t,\vec{r})$ für $x \neq 0$ an.

Hinweis: Maxwell–Faraday-Gleichung

iii. Berechnen Sie, welche Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r})$ man braucht, um dieses Feld zu erzeugen

Hinweis: Maxwell–Ampère-Gleichung

63. Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Sei $f(\vec{r})$ eine Funktion des Ortsvektors in $\mathbb{R}^3$. In kartesischen Koordinaten (x, y, z) [oder (x^1, x^2, x^3)] ist der Ausdruck des Laplace-Operators $\triangle f(x, y, z)$ Ihnen wohlbekannt. In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) ist der Ausdruck komplizierter: somit gilt

$$\triangle f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \tag{3}$$

wobei die (r, θ, φ)-Abhängigkeit der partiellen Ableitungen nicht geschrieben wurde.

i. Prüfen Sie, dass der erste Term auf der rechten Seite der Gl. (3) in den drei äquivalenten Formen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf), \tag{4}$$

geschrieben werden kann.

ii. Sei $f(r,\theta,\varphi) = r^2\big(1+3\cos^2\theta\big) - r\sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi)$.

a) Berechnen Sie $\triangle f(r,\theta,\varphi)$ anhand der Formel (3).

b) Drücken Sie f durch kartesische Koordinaten (x,y,z) aus und berechnen Sie $\triangle f(x,y,z)$. Drücken Sie Ihr Resultat in Kugelkoordinaten aus und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus **ii.a)**.

*64. Dipolstrahler

Das Vektorpotential eines mit Kreisfrequenz ω funktionierenden Dipolstrahlers lautet

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega\vec{P}\sin(kr-\omega t)}{r} \tag{5}$$

mit $k \equiv \omega/c$, $r \equiv |\vec{r}|$, und $\vec{P}$ dem elektrischen Dipolmoment des Strahlers, der im Punkt $\vec{r} = \vec{0}$ liegt.

i. Seien $f(\vec{r})$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{V}$ ein konstanter Vektor; prüfen Sie die folgende Identität:

$$\vec{\nabla}\times\big[f(\vec{r})\,\vec{V}\,\big] = \big[\vec{\nabla}f(\vec{r})\big]\times\vec{V}.$$

ii. Bestimmen Sie die dem Vektorpotential (5) entsprechenden magnetischen und elektrischen Felder $\vec{B}(t,\vec{r})$ und $\vec{E}(t,\vec{r})$.

Hinweis: Das Skalarpotential brauchen Sie *nicht*, um $\vec{E}$ zu bestimmen.