Übung Nr.13

55. Gauß'sches Gesetz in der newtonschen Gravitationstheorie

Die newtonsche Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen m_1, m_2 hat die gleiche mathematische Form wie die Coulomb-Kraft zwischen zwei statischen elektrischen Punktladungen q_1, q_2:

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F}_{\text{Coulomb}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

mit $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und $r \equiv |\vec{r}|$. Diese Analogie kann benutzt werden, um Probleme in der newtonschen Gravitationstheorie zu lösen.

Das newtonsche Gravitationsfeld $\vec{\mathcal{G}}$ sei so definiert, dass die resultierende Kraft auf eine Punktmasse m durch $m\vec{\mathcal{G}}$ gegeben ist.

i. Berechnen Sie den Fluss des von einer Punktmasse M herrührenden Gravitationsfeldes durch eine Kugelfläche, deren Zentrum bei der Punktmasse liegt.

ii. Sei $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r})$ das durch eine Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ erzeugte Gravitationsfeld. „Folgern" Sie aus dem Ergebnis aus **i.a** (und aus Ihren Kenntnissen in der Elektrostatik!) eine plausible Beziehung zwischen der Divergenz von $\vec{\mathcal{G}}$ und ρ.

iii. Das newtonsche Gravitationsfeld kann offensichtlich(? warum?) aus einem Potential Φ_{G} abgeleitet werden: $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{G}}(\vec{r})$. Welcher (bekannten!) Gleichung genügt das von einer Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ herrührende Potential und wie lautet die Lösung dieser Gleichung für eine endlich ausgedehnte Verteilung?

56. Gleichförmiges Magnetfeld

i. Zwei Formel der Vektoranalysis

Indem Sie kartesische Koordinaten verwenden, beweisen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\vec{a}(\vec{r})$ und $\vec{b}(\vec{r})$ zwei Vektorfelder sind:

a) $\vec{\nabla}\cdot\big[\vec{a}(\vec{r})\times\vec{b}(\vec{r})\big] = \vec{b}(\vec{r})\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r})\big] - \vec{a}(\vec{r})\cdot\big[\vec{\nabla}\times\vec{b}(\vec{r})\big]$;

b) $\vec{\nabla}\times\big[\vec{a}(\vec{r})\times\vec{b}(\vec{r})\big] = \big[\vec{\nabla}\cdot\vec{b}(\vec{r})\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{\nabla}\cdot\vec{a}(\vec{r})\big]\vec{b}(\vec{r}) + \big[\vec{b}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\big]\vec{a}(\vec{r}) - \big[\vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\big]\vec{b}(\vec{r})$. Dabei ist für jeden Vektor $\vec{c}$ der Differentialoperator $\vec{c}\cdot\vec{\nabla}$ durch

$$\vec{c}\cdot\vec{\nabla} \equiv c^1\frac{\partial}{\partial x^1} + c^2\frac{\partial}{\partial x^2} + c^3\frac{\partial}{\partial x^3},$$

gegeben, mit $\{c^i\}$ den kartesischen Koordinaten von $\vec{c}$.

Hinweis: Die Formel $\epsilon^{ijk}\epsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{k\ell}$ kann hilfreich sein.

ii. Sei $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}_0\times\vec{r}$ ein Vektorpotential mit $\vec{B}_0$ einem konstanten Vektor.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla}\times\vec{r}$. Zeigen Sie mithilfe von **i.a)**, dass das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ die Coulomb-Eichbedingung erfüllt.

b) Berechnen Sie nun $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$. Folgern Sie daraus und aus **i.b)** die magnetische Induktion, die sich aus $\vec{A}(\vec{r})$ ableiten lässt.

c) Sei angenommen, dass $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_3$. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{A}(\vec{r})$ und finden Sie damit die Ergebnisse aus **ii.a)** und **b)** für $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})$ wieder.

iii. Sei $\vec{A}'(\vec{r}) = x^1 B_0\,\vec{e}_2$. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz dieses Vektorfeldes und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus **ii.c)**.

57. Definition des Amperes

Zwei dünne, unendlich lange Leiter verlaufen parallel mit einem Abstand von $d = 1$ m und werden mit einem Strom von $I = 1$ A durchflossen.

i. Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ des einen Leiters mithilfe des Biot–Savart-Gesetzes. Hierbei werden Sie auf folgendes Integral stoßen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Versuchen Sie dieses zu lösen. Falls Sie zu keinem Ergebnis kommen, dürfen Sie das Integral nachschlagen.

ii. Berechnen Sie die Kraft auf den anderen Leiter pro Meter Leiterlänge.
Das Ergebnis ist kein Zufall: Das Ampere ist gerade als die Stromstärke definiert, bei der sich die berechnete Kraft ergibt.

58. Helmholtz-Spule

Zwei parallele kreisförmige Leiterschleifen werden beide vom Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Die Kreise liegen parallel zur x-y-Ebene, sie haben beide den Radius R und ihre Mittelpunkte liegen bei $(x, y, z) = (0, 0, d)$ und $(0, 0, -d)$. Welche Beziehung muss zwischen dem Radius R und dem Abstand $D = 2d$ der Kreise gelten, damit das Magnetfeld in der Nähe des Koordinatenursprungs möglichst wenig variiert?

*59. Magnetischer Dipol

Eine dünne Kugelschale (Radius R, Mittelpunkt der Kugel im Ursprung) mit homogener Oberflächenladungsdichte σ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die x^3-Achse.

i. Ladungs- und Ladungsstromdichte

a) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$?

b) Wie lautet die Geschwindigkeit eines Punktes der Kugelfläche mit Polar- und Azimutwinkel (θ, φ)? Folgern Sie daraus die Ladungsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$.

ii. Es soll nun das $\vec{B}$-Feld innerhalb und außerhalb der Kugelschale bestimmt werden. Ein geeigneter Ansatz ist:

$$\vec{B} = f(r) x^3 \, \vec{r} - g(r) \, \vec{e}_3$$

mit $r \equiv |\vec{r}|$.

a) Wie weit legen die Grundgleichungen der Magnetostatik im stromfreien Außen- und Innenraum die Funktionen f und g fest?

b) Es bleiben zwei Konstanten übrig, welche ist innen und welche ist außen Null?

iii. Bestimmen Sie die beiden noch unbekannten Konstanten. Betrachten Sie dazu die Maxwell-Gleichungen auf der Kugelschale, d.h. auch bei $r = R$.

Hinweis: In dieser Aufgabe treten mehrmals (**ii.a**, **iii.**) gewöhnliche Differentialgleichungen auf, die sich entweder über „Separation der Variablen" oder „Variation der Konstanten" lösen lassen, vgl. Vorlesung *Rechenmethoden der Physik*.