# Übung Nr.12

## 50. Elektrisch geladene Platte

**i.** Eine homogen geladene, unendlich dünne und ausgedehnte ebene Platte mit elektrischer Ladung pro Flächeneinheit $\sigma$ befinde sich in der $(x, y)$-Ebene. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z \neq 0$

**a)** anhand des Gauß'schen Gesetzes;

**b)** anhand eines Integrals (*Hinweis*: wählen Sie „gute" Koordinaten in der $(x, y)$-Ebene!).

**c)** Wie verhält sich das Feld bei $z = 0$?

**ii.** Folgern Sie aus den Ergebnissen aus **i.** das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ in jedem Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Welche Schwierigkeit tritt auf, wenn Sie versuchen, dieses Potential anhand eines Integrals zu berechnen?

**iii.** Betrachten Sie jetzt eine Anordnung mit zwei parallelen, homogen geladenen, unendlich dünnen und ausgedehnten Platten: die erste, mit elektrischer Ladung pro Flächeneinheit $+\sigma$, befindet sich bei $z = -d/2$ mit $d > 0$; die zweite, mit elektrischer Ladung pro Flächeneinheit $-\sigma$, befindet sich bei $z = +d/2$. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $|z| \neq d/2$, sowie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ in jedem Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

*Hinweis*: Mit dem richtigen Argument (Stichwort!) sind die Berechnungen nur eine Zeile lang.

## 51. Greensche Funktion

Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma y(t) = F(t), \tag{1}$$

wobei die „Quelle" $F(t)$ eine stetige Funktion ist.

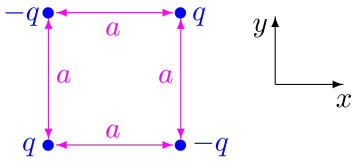
**i.** Prüfen Sie nach, dass die Greensche Funktion zum Differentialoperator auf der linken Seite der Gl. (2) durch $G(t, t') = \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}\,\Theta(t - t')$ gegeben ist, wobei $\Theta$ die Heaviside-Funktion ist.

**ii.** Geben Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ zur Differentialgleichung (2) an. Wie lautet die Lösung, welche die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt?

*Hinweis*: Sie können zwar mit Kenntnissen aus der Vorlesung *Rechenmethoden der Physik* (Stichwort: „Variation der Konstanten") arbeiten; das Spiel besteht vielmehr darin, eine spezielle Lösung von (2) mithilfe der Greenschen Funktion aus **i.** zu schreiben.

## 52. Multipolentwicklung (1)

Berechnen Sie die Gesamtladung $Q$, das elektrische Dipolmoment $\vec{P}$ und die kartesischen Komponenten $Q^{ij}$ des elektrischen Quadrupoltensors $\mathbf{Q}$ für die unten dargestellte Anordnung (Sie können den Nullpunkt des Koordinatensystems im Zentrum des Quadrats nehmen).




## 53. Multipolentwicklung (2)

Wie transformieren die Gesamtladung $Q$, das elektrische Dipolmoment $\vec{P}$ (erstens bei $Q \neq 0$, dann bei $Q = 0$) und die elektrischen Quadrupolmomente $Q^{ij}$ (bei $Q = 0$ und $\vec{P} = \vec{0}$) einer Ladungsverteilung $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ unter Translationen des Koordinatenursprungs?

### *54. Greensche Funktion (2)

Prüfen Sie nach, dass die Greensche Funktion zur inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (*Helmholtz-Gleichung*)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2 y(t) = F(t) \quad \text{mit } \omega > 0 \tag{2}$$

durch $G(t,t') = -\dfrac{\mathrm{e}^{-\omega|t-t'|}}{2\omega}$ gegeben ist.