Übung Nr.11

45. Ladungsverteilungen

Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_{\text{el.}}(\vec{r})$ für folgende Objekte mit Gesamtladung Q an:

i. eine homogen geladene Vollkugel mit Radius R;

ii. einen unendlich dünnen, homogen geladenen Draht, der zu einem Kreis mit Radius R gebogen ist;

iii. eine unendlich dünne, homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R;

iv. einen homogen geladenen Hohlzylinder mit Innenradius R_1, Außenradius R_2 und Höhe h.

46. Elektrisch geladene Vollkugel

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q.

47. Elektrisch geladener Stab

Gesucht ist das elektrostatische Potential eines homogen geladenen und unendlich dünnen geraden Stabes mit elektrischer Ladung pro Längeneinheit λ. (Wählen Sie die z-Achse in Richtung des Stabes).

i. Betrachten Sie zunächst einen unendlich langen Stab.

Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um den Fluss des elektrischen Feldes durch einen endlich hohen Zylinder, der symmetrisch um den Stab herum liegt, zu berechnen. Bestimmen Sie daraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das Potential $\Phi(\vec{r})$.

ii. Betrachten Sie nun einen Stab der Länge $2a$ mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems.

a) Geben Sie die Ladungsdichte in kartesischen Koordinaten an und bestimmen Sie daraus das Potential $\Phi(\vec{r})$. Erhalten Sie für das Ergebnis im Limes $a \to \infty$ wieder das Potential aus **i.**?

b) Wie ergibt sich im Grenzfall $a \to 0$ das Coulomb-Potential (bei fester Gesamtladung $Q = 2a\lambda$)?

48. δ-Distribution

i. Sei $\delta_\epsilon(x) \equiv \epsilon/[\pi(x^2 + \epsilon^2)]$; prüfen Sie, dass δ_ϵ eine Darstellung der δ-Distribution ist. Insbesondere müssen Sie $\int \delta_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = 1$ zeigen.

ii. Für welchen Wert von α ist $\delta_\epsilon(x) \equiv \alpha\big[\delta(x+\epsilon) + \delta(x-\epsilon)\big]$ eine Darstellung der δ-Distribution?

iii. Gleiche Frage für $\delta_\epsilon \equiv \alpha\, \mathrm{e}^{-|x|/\epsilon}$.

iv. Welche Darstellung $\Theta_\epsilon(x)$ der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ lässt sich aus $\tanh(x)$ basteln? Leiten Sie daraus eine Darstellung δ_ϵ der δ-Distribution ab.

v. Für welchen Wert von α gilt $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\delta(x+\epsilon) - \delta(x-\epsilon)}{\epsilon} = \alpha\delta'(x)$?

vi. Betrachten Sie Polarkoordinaten (r, θ) in der Ebene. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta)$ hat man die Gleichung $\delta^{(2)}(\mathbf{r}) = \alpha(r, \theta)\delta(r)$, mit $\mathbf{r}$ dem zweidimensionalen Ortsvektor?

vii. Betrachten Sie Kugelkoordinaten (r, θ, φ) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, \varphi)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, \varphi)\delta(r)$?

viii. Betrachten Sie nun Zylinderkoordinaten (r, θ, z) im dreidimensionalen Raum. Für welche Funktion $\alpha(r, \theta, z)$ hat man die Gleichung $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \alpha(r, \theta, z)\delta(r)$?

*49. Rotationssymmetrisches Feld

Sei in einem ladungsfreien Gebiet ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\,\vec{e}_r(\vec{r}) + E_z(\vec{r})\,\vec{e}_z$ mit Rotationssymmetrie um die z-Achse, wobei $\vec{e}_r$ bzw. $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor in radialer bzw. z-Richtung bezeichnet. Zeigen Sie, dass in der Umgebung der z-Achse gilt

$$E_r(\vec{r}) \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Hinweis: Mit dem richtigen Argument ist die Lösung weniger als 5 Zeilen lang!