Übung Nr.10

40. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Sei

$$\mathcal{H}(t,q,p) = \frac{p^2}{2m}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + V(q)\,\mathrm{e}^{\gamma t} \tag{1}$$

die Hamilton-Funktion eines Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad, wobei m und γ positive Zahlen sind.

i. Geben Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen an.

ii. Drücken Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(t,q,\dot{q})$ des Systems durch q und $\dot{q}$ aus und stellen Sie die Bewegungsgleichung für $q(t)$ auf.

iii. Sei nun $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ mit $\omega > 0$. Wie lautet die Bewegungsgleichung aus **ii.**? Welches System beschreibt die Hamilton-Funktion (1) bzw. die von Ihnen gefundene Lagrange-Funktion?

41. Phasenraum

Ein Massenpunkt in einer Dimension mit Koordinate x bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +ax & \text{für } x \geq 0, \\ -bx & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

mit $a, b \geq 0$.

i. Leiten Sie die Hamilton-Funktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her.

ii. Skizzieren Sie das Potential und die Phasenraumtrajektorien. Für letztere betrachten Sie vier verschiedene Fälle: $a = b = 1$; $a = 2b = 2$; $a = \infty$ und $b = 1$; $a = 0$ und $b = 1$.

42. Phasenraumtrajektorie der gedämpften Schwingung

Betrachten Sie einen eindimensionalen, entlang der x-Achse schwingenden, gedämpften harmonischen Oszillator. Erklären Sie (mathematisch), wie seine Trajektorie in dem von x und p aufgespannten Phasenraum aussieht, wobei p den zu x konjugierten Impuls bezeichnet.

43. Poisson-Klammern

i. Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L^i, p^j\}$ der kartesischen Komponenten von Drehimpuls $\vec{L}$ und Impuls $\vec{p}$ eines Massenpunkts.

ii. Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{L^i, L^j\}$ der kartesischen Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$.
Hinweis: Die Beziehung $\epsilon^{abc}\epsilon^{ade} = \delta^{bd}\delta^{ce} - \delta^{be}\delta^{cd}$ kann nützlich sein.

iii. Bestimmen Sie die Poisson-Klammern $\{\vec{L}^2, L^i\}$.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus **ii.** und die Produktregel.

*44. Kanonische Transformationen

Seien (q,p) kanonisch konjugierte Variablen im Phasenraum für ein Problem mit $s = 1$ Freiheitsgrad.

i. Sei $\boldsymbol{\Lambda}$ die Matrix der Koordinatentransformation $(q,p) \to (Q,P)$. Zeigen Sie, dass die Transformation kanonisch ist, wenn $\det \boldsymbol{\Lambda} = 1$.

ii. Ist die Transformation $(q,p) \to (Q,P)$ mit $Q(p,q) = \arctan\left(\frac{q}{p}\right)$, $P(q,p) = \dfrac{q^2+p^2}{2}$ kanonisch?

iii. Für welche Parameter a, b, c, d sind die Transformationen $(q,p) \to (Q,P)$ mit $Q = q^a\,p^b$, $P = q^c\,p^d$ kanonisch?