Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

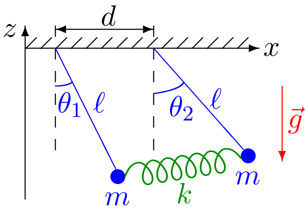
1. Gekoppelte ebene Pendel (35 P.)

i. Vorbereitung

a) Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen? Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

b) Wie hängt die Hamilton-Funktion mit der Lagrange-Funktion zusammen? Wie lauten allgemein die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen?

ii. Zwei identische Pendel bestehen aus einer (Punkt)Masse m am Ende eines masselosen Stabs der Länge ℓ. Die Aufhängepunkte befinden sich auf der gleichen Höhe im Abstand d von einander und die Pendel bewegen sich nur in der (x, z)-Ebene. Die zwei Massen sind mit einer Feder (Stärke k, Ruhelänge d) an einander gekoppelt. Das ganze System liegt im Schwerefeld $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$.



a) Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass die Standard-Lagrange-Funktion des Systems in der Form

$$\mathcal{L} = \frac{m\ell^2}{2}\big(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\big) + mg\ell\big(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\big) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d\right)^2 \qquad (1)$$

geschrieben werden kann.

c) Bestimmen Sie die zu (θ_1, θ_2) kanonisch konjugierten Impulse (p_1, p_2) und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch die Koordinaten und Impulse aus.

d) Betrachten Sie jetzt kleine Auslenkungswinkel θ_1, θ_2 aus der Gleichgewichtsposition $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Entwickeln Sie die Lagrange-Funktion (1) in Taylor-Reihe bis zur Ordnung θ_1^2, θ_2^2 [*Tipp*: den Term unter der Wurzel brauchen Sie nur zur 1. Ordnung: θ_1, θ_2] und geben Sie die entsprechenden Euler–Lagrange-Gleichungen an. Bestimmen Sie die Normalmoden (Eigenmoden und -frequenzen) der kleinen Schwingungen.

2. Zentralkraftproblem (30 P.)

Eine Punktmasse m bewege sich im Zentralpotential $V(\vec{r}) = -\dfrac{\alpha}{|\vec{r}|^2}$ mit einer Konstanten $\alpha > 0$.

i. Erklären Sie, warum die Bewegung in einer Ebene stattfindet.
Seien x, y kartesische Koordinaten in dieser Ebene und $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ die zugehörigen Basisvektoren.

ii. Die Bahnkurve sei mit dem Abstand $r(t)$ vom Kraftzentrum und dem Winkel $\theta(t)$ relativ zur x-Achse parametrisiert: $\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$, mit dem instantanen Einheitsvektor in Radialrichtung

$$\vec{e}_r(t) = \cos\theta(t)\,\vec{e}_x + \sin\theta(t)\,\vec{e}_y.$$

Sei $\vec{e}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{e}_x + \cos\theta(t)\,\vec{e}_y$.

a) Drücken Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ des Massenpunktes durch $r(t)$, $\theta(t)$ (und ihre Ableitungen) und die Vektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$ aus.

b) Geben Sie den Betrag $\ell \equiv |\vec{L}|$ des Drehimpulses des Massenpunktes an, ausgedrückt durch die Masse m und die Funktionen $r(t)$, $\theta(t)$ und ihre Ableitungen.

iii. Anstatt der Zeitabhängigkeiten $r(t)$, $\theta(t)$ sucht man die Abhängigkeit $r(\theta)$ des Abstands r vom Winkel θ. Sei $u(\theta) \equiv 1/r(\theta)$. Dann gilt

$$\vec{x}(\theta) = r(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)}\,\vec{e}_r(\theta).$$

Ableitungen nach θ werden mit $'$ bezeichnet.

a) Drücken Sie $\dot{\theta}(t)$ durch m, ℓ und $u(\theta)$ aus.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$:
- zuerst ausgedrückt durch $r(\theta)$, $r'(\theta)$, $\dot{\theta}(t)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\theta)$, $\vec{e}_\theta(\theta)$;
- dann ausgedrückt durch $u(\theta)$, $u'(\theta)$, $\dot{\theta}(t)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\theta)$, $\vec{e}_\theta(\theta)$;
- schließlich ausgedrückt durch m, ℓ, $u(\theta)$, $u'(\theta)$ und die Vektoren $\vec{e}_r(\theta)$, $\vec{e}_\theta(\theta)$.

Hinweis: Möglicherweise treten einige der angegebenen Funktionen oder Vektoren in den gesuchten Ausdrücken nicht auf.

c) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ durch

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{\ell^2 u(\theta)^2}{m^2}\big[u''(\theta) + u(\theta)\big]\,\vec{e}_r(\theta) \tag{2}$$

gegeben ist.

iv. Das Bezugssystem, in welchem das Kraftzentrum ruht, sei ein Inertialsystem.

a) Drücken Sie die Kraft auf den Massenpunkt durch $u(\theta)$ und andere relevante Größen aus.

b) Wie lautet das zweite newtonsche Gesetz für den Massenpunkt? Nach einer trivialen Vereinfachung ist die entsprechende Bewegungsgleichung eine Ihnen bekannte Differentialgleichung für $u(\theta)$: geben Sie die allgemeinen Lösungen dieser Gleichung an.

Hinweis: Fallunterscheidung!

3. Lagrange-Formalismus **(25 P.)**

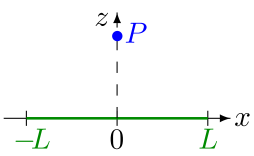
Ein homogenes Seil (unendlich dünn, Massendichte ρ, Länge ℓ) liege zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über die Tischkante senkrecht nach unten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und rutscht reibungsfrei herunter.

i. Wie lautet die (Standard-)Lagrange-Funktion des Systems?

ii. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Bestimmen Sie die Lösung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt (nur bis zum Zeitpunkt des vollständigen Abrutschens vom Tisch).

4. Elektrostatik **(20 P.)**

i. Bestimmen Sie das elektrostatische Feld in einem Punkt P oberhalb des Mittelpunkts eines geraden Streckenabschnitts der Länge $2L$, der eine gleichförmige Ladung pro Länge λ trägt (entsprechend einer Gesamtladung $Q = 2L\lambda$).



ii. Bestimmen Sie das elektrostatische Feld in einem Punkt in der Höhe z oberhalb des Zentrums einer rechteckigen Schleife mit Kantenlänge a, die eine gleichförmige Ladung pro Länge λ trägt.

Hinweis: $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+z^2}} = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+z^2}}{z}$, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+z^2} = \frac{1}{z}\arctan\frac{x}{z}$, $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

(Nicht alle Formeln sind relevant für die Aufgabe!)

5. Elektrodynamik im Vakuum (30 P.)

i. Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen $\rho_{\text{el.}}$, $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ an.

ii. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung? Welche Erhaltungsgröße liegt ihr zugrunde?

iii. Wie hängen $\vec{E}(t,\vec{r})$ und $\vec{B}(t,\vec{r})$ vom Vektorpotential $\vec{A}(t,\vec{r})$ und vom Skalarpotential $\Phi(t,\vec{r})$ ab? Wie lautet eine allgemeine Eichtransformation dieser Potentiale?

iv. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Feldes $(\vec{E},\vec{B})$ im Vakuum (d.h. für $\rho_{\text{el.}} = 0$, $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$) aus den Maxwell-Gleichungen her.

Hinweis: Nehmen Sie z.B. die Rotation der Maxwell–Faraday-Gleichung als Ausgangspunkt.

v. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen der elektromagnetischen Potentiale $(\Phi,\vec{A})$ aus den Maxwell-Gleichungen her. Mit welcher Eichbedingung vereinfachen sich diese Bewegungsgleichungen?

Es können 140 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$