1. Gekoppelte ebene Pendel (35 P.)

i. Vorbereitung (10 P.)

a) (6P.) Die Euler–Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \forall i \tag{1}$$

mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ und den verallgemeinerten Koordinaten q_i und Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$.

Diese Gleichungen können aus dem *Hamilton-Prinzip* (Extremalprinzip) hergeleitet werden: für die physikalisch realisierte Bewegung ist die Wirkung

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}\big(t, \{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}\big)\,\mathrm{d}t$$

extremal.

b) (4P.) Ausgehend von der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, Funktion der $\{q_i\}$ und $\{\dot{q}_i\}$, lautet die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \tag{2}$$

$\mathcal{H}$ soll als Funktion der $\{q_i\}$ und der Impulse $\{p_i\}$ angesehen werden, wobei

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3}$$

Dann lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \forall i. \tag{4}$$

ii. (25 P.)

a) (4 P.) Insgesamt könnte jede (Punkt)Masse drei (Translations-)Freiheitsgrade haben. Deren Bewegungen sollen in der (x,z)-Ebene bleiben, entsprechend zwei ersten Zwangsbedingungen der Art $y = 0$. Dazu ist der Abstand jeder Masse zum zugehörigen Aufhängepunkt fest, entsprechend zwei anderen Zwangsbedingungen der Art $x^2 + z^2 = \ell^2$. Somit bleiben zwei Freiheitsgrade übrig.

b) (7P.) Die Positionen der Massen in der (x,z)-Ebene sind (mit Nullpunkt des Koordinatensystems im Aufhängepunkt der mit 1 bezeichneten linken Masse)

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \ell\sin\theta_1 \\ -\ell\cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} d + \ell\sin\theta_2 \\ -\ell\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Abstand D zwischen der Massen

$$D \equiv |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = \sqrt{\big(d + \ell\sin\theta_2 - \ell\sin\theta_1\big)^2 + \big(\ell\cos\theta_1 - \ell\cos\theta_2\big)^2}.$$

Nach einfacher Umschreibung gilt noch

$$D = \sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2},$$

so dass die Auslenkung der Feder aus ihrer Ruhelänge d durch

$$D - d = \sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d$$

gegeben ist. Die potentielle Energie der Feder ist $\frac{1}{2}k$ multipliziert mit dem Quadrat dieser Auslenkung:

$$V_{\text{Feder}} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d\right)^2. \tag{5}$$

Dann ist die potentielle Energie jeder Masse im Schwerefeld $mgz_i = -mg\ell\cos\theta_i$, entsprechend insgesamt

$$V_{\text{Schwer.}} = -mg\ell\big(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\big). \tag{6}$$

Schließlich sind die Geschwindigkeiten der Massen

$$\dot{\vec{x}}_1 = \begin{pmatrix} \ell\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ \ell\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}_2 = \begin{pmatrix} \ell\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ \ell\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

woraus erstens $\big(\dot{\vec{x}}_i\big)^2 = \ell^2\dot{\theta}_i^2$ und damit die gesamte kinetische Energie

$$T \equiv \frac{1}{2}m\big(\dot{\vec{x}}_1\big)^2 + \frac{1}{2}m\big(\dot{\vec{x}}_2\big)^2 = \frac{m\ell^2}{2}\big(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\big) \tag{7}$$

folgt.

Unter Verwendung der Zwischenergebnisse (5)–(7) lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{m\ell^2}{2}\big(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\big) + mg\ell\big(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\big)& \\ - \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d\right)^2&. \end{aligned} \tag{8}$$

c) **(4P.)**

Aus der Lagrange-Funktion (8) folgen die verallgemeinerten Impulse, und zwar

$$p_1 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = m\ell^2\dot{\theta}_1 \quad \text{und} \quad p_2 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = m\ell^2\dot{\theta}_2. \tag{9}$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion des Systems

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_1\dot{\theta}_1 + p_2\dot{\theta}_2 - \mathcal{L} \\ &= \frac{m\ell^2}{2}\big(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\big) - mg\ell\big(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\big) \\ &\qquad + \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d\right)^2,\end{aligned}$$

d.h. noch

$$\mathcal{H} = \frac{(p_1)^2}{2m\ell^2} + \frac{(p_2)^2}{2m\ell^2} - mg\ell\big(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\big) \tag{10}$$

$$+ \frac{k}{2}\left(\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} - d\right)^2. \tag{11}$$

d) **(10P.)** Für kleine Auslenkungswinkel θ_i, d.h. $|\theta_i| \ll 1$, gelten

$$\sin\theta_i = \theta_i + \mathcal{O}(\theta_i^3) \quad \text{und} \quad \cos\theta_i = 1 - \frac{\theta_i^2}{2} + \mathcal{O}(\theta_i^4).$$

Zur Ordnung θ_1, θ_2 wird das Argument der Wurzel in Gl. (8) zu

$$\begin{aligned}d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2 &\simeq d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\theta_1 - \theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(1-1\big)^2 \\ &\simeq d^2\left[1 - \frac{2\ell}{d}(\theta_1 - \theta_2)\right].\end{aligned}$$

Daraus folgt unter Nutzung von $(1+u)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}u + \mathcal{O}(u^2)$ für $|u| \ll 1$

$$\sqrt{d^2\left[1 - \frac{\ell}{d}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]^2 + \ell^2\big(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\big)^2} \simeq d\sqrt{1 - \frac{2\ell}{d}(\theta_1 - \theta_2)} \simeq d\left[1 - \frac{\ell}{d}(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

und daher
$$\sqrt{d^2\left[1-\frac{\ell}{d}(\sin\theta_1-\sin\theta_2)\right]^2+\ell^2\big(\cos\theta_1-\cos\theta_2\big)^2}-d\simeq-\ell(\theta_1-\theta_2).$$
Mit diesem Ergebnis und der Taylor-Entwicklung von $\cos\theta_i$ wird die Lagrange-Funktion (8) für kleine Auslenkungswinkel zu
$$\mathcal{L}\simeq\frac{m\ell^2}{2}\big(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2\big)+mg\ell-\frac{mg\ell}{2}\big(\theta_1^2+\theta_2^2\big)-\frac{k\ell^2}{2}(\theta_1-\theta_2)^2. \tag{12}$$
Dabei wird der zweite Term — eine Konstante — keine Rolle für die Bewegungsgleichungen spielen.

Ausgehend von dieser Lagrange-Funktion lauten die Euler–Lagrange-Gleichungen
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_1}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1}\qquad\text{d.h.}\quad m\ell^2\ddot\theta_1=-mg\ell\theta_1-k\ell^2(\theta_1-\theta_2) \tag{13a}$$
und
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_2}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2}\qquad\text{d.h.}\quad m\ell^2\ddot\theta_2=-mg\ell\theta_2+k\ell^2(\theta_1-\theta_2). \tag{13b}$$
In Matrixform kann man noch
$$\begin{pmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m} & \frac{k}{m}\\ \frac{k}{m} & \frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} \tag{13c}$$
schreiben. Die Eigenwerte der Quadratmatrix in Gl. (13c) sind die Quadrate der Eigen(kreis)frequenzen der kleinen Schwingungen, die entsprechenden Eigenvektoren definieren die zugehörigen Eigenmoden. Somit besteht eine erste Möglichkeit darin, die Quadratmatrix zu diagonalisieren.

Alternativ kann man auf den Gl. (13a)–(13b) sehen, dass sich einige Terme in deren Addieren bzw. Subtrahieren kürzen werden. Somit gilt einerseits
$$\ddot\theta_1+\ddot\theta_2=-\frac{g}{\ell}(\theta_1+\theta_2)=-\omega^2(\theta_1+\theta_2)\quad\text{mit}\quad\omega^2\equiv\frac{g}{\ell}. \tag{14a}$$
Man erkennt hier eine erste Eigenmode mit der zugehörigen Eigenkreisfrequenz $\omega=\sqrt{g/\ell}$. Diese Schwingungsmode entspricht insbesondere der Bewegung, in der zu einem Anfangszeitpunkt t_0 die Auslenkungen der zwei Feder und deren Winkelgeschwindigkeiten gleich sind: $\theta_1(t_0)=\theta_2(t_0)$ und $\dot\theta_1(t_0)=\dot\theta_2(t_0)$. Dann schwingen die beiden Pendel parallel zu einander — und die Feder spielt keine Rolle.

Andererseits führen Gl. (13a)–(13b) zu
$$\ddot\theta_1-\ddot\theta_2=-\left(\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}\right)(\theta_1-\theta_2)=-\Omega^2(\theta_1-\theta_2)\quad\text{mit}\quad\Omega^2\equiv\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}. \tag{14b}$$
Die zweite Eigenkreisfrequenz des Systems ist Ω, und die zugehörige Eigenmode $\theta_1-\theta_2$. Diese entspricht der Bewegung, in der die Pendel spiegelsymmetrisch zu einander schwingen: z.B. mit Anfangsbedingungen $\theta_1(t_0)=-\theta_2(t_0)$, $\dot\theta_1(t_0)=-\dot\theta_2(t_0)$, und daher $\theta_1(t)=-\theta_2(t)$ zu jedem späteren Zeitpunkt $t\geq t_0$.

2. Zentralkraftproblem (30 P.)

i. **(3 P.)** Da die Kraft zentral ist, d.h. entlang des Abstandsvektors zwischen Kraftzentrum und Punktmasse gerichtet, ist der Drehimpuls $\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}=m\vec{x}\times\dot{\vec{x}}$ eine Erhaltungsgröße. Daher bleiben $\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ immer in einer Ebene senkrecht auf $\vec{L}$: die Bewegung findet in jener Ebene statt.

ii. **(4 P.)**

a) **(1P.)** Aus $\vec{x}(t)=r(t)\,\vec{e}_r(t)$ und den gegebenen Ausdrücken von $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\theta(t)$ folgt sofort
$$\dot{\vec{x}}(t)=\dot r(t)\,\vec{e}_r(t)+r(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t}=\dot r(t)\,\vec{e}_r(t)+r(t)\dot\theta(t)\,\vec{e}_\theta(t). \tag{15}$$

b) **(3P.)** Dann führt $\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$ zu

$$\vec{L} = mr(t)\,\vec{e}_r(t) \times \big[\dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta(t)\big] = mr(t)^2\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_z,$$

wobei $\vec{e}_z$ den Einheitsvektor senkrecht auf der Ebene der Bewegung bezeichnet. Daraus folgt (der Einfachheit halber wird ab jetzt angenommen, dass $\dot{\theta}(t)$ positiv ist)

$$\ell \equiv |\vec{L}| = mr(t)^2\dot{\theta}(t). \tag{16}$$

iii. **(11 P.)**

a) **(1P.)** Die Beziehung (16) gibt sofort

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\ell}{mr(\theta)^2} = \frac{\ell}{m}u(\theta)^2. \tag{17}$$

b) **(5P.)** Ein erster Ausdruck für die Geschwindigkeit wurde schon in Frage **ii.a)** gefunden. Unter Verwendung der Kettenregel gilt

$$\dot{r}(t) = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}(t) = r'(\theta)\dot{\theta}(t).$$

Daraus folgt nach Einsetzen in Gl. (15)

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta = \big[r'(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) + r(\theta)\,\vec{e}_\theta(\theta)\big]\dot{\theta}(t). \tag{18}$$

Aus $r(\theta) = 1/u(\theta)$ folgt sofort $r'(\theta) = -u'(\theta)/u(\theta)^2$. Somit lässt sich Gl. (17) noch als

$$\dot{\vec{x}} = \left[-\frac{u'(\theta)}{u(\theta)^2}\,\vec{e}_r(\theta) + \frac{1}{u(\theta)}\,\vec{e}_\theta(\theta)\right]\dot{\theta}(t) \tag{19}$$

umschreiben. Dabei kann man $\dot{\theta}(t)$ mithilfe der Gl. (16) ausdrücken, was zu

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\ell}{m}\big[-u'(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) + u(\theta)\,\vec{e}_\theta(\theta)\big] \tag{20}$$

führt.

c) **(5P.)** Die Anwendung der Kettenregel gibt

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{x}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{x}}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{x}}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}.$$

Dabei wird $\dot{\theta}$ durch Gl. (16) gegeben, während $\mathrm{d}\dot{\vec{x}}/\mathrm{d}\theta$ aus Gl. (18) und der Produktregel folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\vec{x}}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell}{m}\left[-u''(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) - u'(\theta)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + u'(\theta)\,\vec{e}_\theta(\theta) + u(\theta)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right].$$

Da $\mathrm{d}\vec{e}_r(\theta)/\mathrm{d}\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$ kürzen sich der zweite und der dritte Term; mit $\mathrm{d}\vec{e}_\theta(\theta)/\mathrm{d}\theta = -\vec{e}_r(\theta)$ bleibt

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\vec{x}}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell}{m}\big[-u''(\theta)\,\vec{e}_r(\theta) - u(\theta)\,\vec{e}_r(\theta)\big]$$

übrig, woraus

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{\ell^2u(\theta)^2}{m^2}\big[u''(\theta) + u(\theta)\big]\,\vec{e}_r(\theta) \tag{21}$$

folgt.

iv. **(12 P.)**

a) **(3P.)** Das angenommene Potential $V(\vec{r}) = V(r) = -\alpha/r^2$, wobei $r \equiv |\vec{r}|$, führt zur Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = -\frac{2\alpha}{r^3}\vec{e}_r = -2\alpha u(\theta)^3\,\vec{e}_r. \tag{22}$$

b) **(9P.)** Im mit dem Kraftzentrum assoziierten Inertialsystem lautet das zweite newtonsche Gesetz

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \qquad \text{d.h.} \qquad -m\frac{\ell^2 u(\theta)^2}{m^2}\big[u''(\theta) + u(\theta)\big]\,\vec{e}_r = -2\alpha u(\theta)^3\,\vec{e}_r, \tag{23}$$

wobei Gl. (20) und (21) benutzt wurden. Falls $u(\theta) \neq 0$, d.h. wenn $r(\theta)$ nicht identisch unendlich groß ist, kann man die zweite Gleichung durch $u(\theta)^2$ teilen. Nach einfacher Umschreibung und Projektion entlang der Radialrichtung ergibt sich

$$u''(\theta) + \left(1 - \frac{2\alpha m}{\ell^2}\right)u(\theta) = 0. \tag{24}$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösungen wohlbekannt sein sollen:

- Für „kleine" Drehimpulse (bei vorgegebenen α und m) $\ell < \sqrt{2\alpha m}$ ist der Koeffizient in den großen Klammern negativ: mit $\kappa^2 \equiv 2\alpha m/\ell^2 - 1 > 0$ lautet die Bewegungsgleichung (23) $u''(\theta) - \kappa^2 u(\theta) = 0$, mit allgemeiner Lösung $u(\theta) = A\,\mathrm{e}^{\kappa\theta} + B\,\mathrm{e}^{-\kappa\theta}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.
  Im allgemeinen Fall $A \neq 0$ wächst $u(\theta)$ exponentiell groß, d.h. $r(\theta)$ wird exponentiell klein: die Bahnkurve ist eine (logarithmische) Spirale.
- Dagegen ist der Vorfaktor $\omega^2 \equiv 1 - 2\alpha m/\ell^2$ von $u(\theta)$ für große Drehimpulse $\ell > \sqrt{2\alpha m}$ positiv. Dann lautet die Bewegungsgleichung (23) $u''(\theta) + \omega^2 u(\theta) = 0$, mit allgemeiner Lösung $u(\theta) = A\cos(\omega\theta) + B\sin(\omega\theta)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.
- Schließlich existiert noch der Grenzfall $\ell = \sqrt{2\alpha m}$, der zur vereinfachten Bewegungsgleichung $u''(\theta) = 0$ führt, deren allgemeinen Lösung $u(\theta) = A\,\theta + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ ist: für $A \neq 0$ ist die Bahnkurve $r(\theta)$ wieder eine Spirale, jetzt nimmt aber $r(\theta)$ langsamer mit θ ab. Für $A = 0$ ist die Bahnkurve ein Kreis mit Radius $1/B$ (so dass B positiv sein muss!).

3. Lagrange-Formalismus **(25 P.)**

i. **(13 P.)** Für die Schwerkraft auf das Seil zählt nur der Anteils des Seils, der bereits über die Tischkante geglitten ist: sei $q > 0$ die Länge dieses Anteils; dann ist dessen Masse ρq. Für die Bewegung passiert alles, als ob die Gesamtmasse dieses Anteils in dessen Schwerpunkt wäre, und zwar bei einer Höhe $q/2$ unter dem Tisch. wenn der Nullpunkt für die potentiellen Energien im Schwerefeld beim Tisch genommen wird, ist die potentielle Energie des Seils

$$V = -(\rho q)g\frac{q}{2}, \tag{25}$$

entsprechend dem Produkt aus Masse, Schwerebeschleunigung, und Höhe (mit einem Minus-Zeichen, denn die Höhe unter dem Tisch negativ gezählt werden muss). Der Anteil des Seils, der noch auf dem Tisch liegt, trägt nicht zu dieser potentiellen Energie bei.

Wegen der Definition von q ist $\dot{q}$ die Geschwindigkeit (genauer, deren Betrag) des Vorderendpunkts des Seils. Da das Seil in seiner Bewegung sich nicht ausdehnt (entsprechend der Annahme einer konstanten Massendichte), bewegt sich jeder Punkt des Seils mit dem gleichem Geschwindigkeitsbetrag: jene Punkte, die schon über die Tischkante gefallen sind, haben eine Geschwindigkeit $\dot{q}$, die „nach unten" gerichtet ist; für die Punkte, die noch auf dem Tisch sind, ist die Geschwindigkeit noch parallel zur Tischebene. Die gesamte kinetische Energie des Seils ist daher

$$T = \frac{1}{2}(\rho\ell)\dot{q}^2. \tag{26}$$

Insgesamt lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\rho\ell}{2}\dot{q}^2 + \frac{\rho g}{2}q^2. \tag{27}$$

ii. (12 P.) Ausgehend von der Lagrange-Funktion (27) führt die Euler–Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$$

zur Bewegungsgleichung $\rho\ell\ddot{q} = \rho g q$, d.h. noch

$$\ddot{q}(t) = \frac{g}{\ell}q(t) = \kappa^2 q(t) \quad \text{mit} \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{28}$$

Die allgemeine Lösung dieser Lösung ist der Form $q(t) = A\,\mathrm{e}^{\kappa t} + B\,\mathrm{e}^{-\kappa t}$, wobei sich die Konstanten A, B aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Zur Zeit $t = 0$ sollen $q = \ell/2$ und $\dot{q} = 0$ gelten, wobei $\dot{q}(t) = A\kappa\,\mathrm{e}^{\kappa t} - B\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa t}$. Somit gelten

$$A + B = \frac{\ell}{2} \quad \text{und} \quad (A - B)\kappa = 0.$$

Die zweite Gleichung gibt sofort $A = B$, womit die erste zu $A = \ell/4$ führt. Schließlich lautet die gesuchte Lösung

$$q(t) = \frac{\ell}{4}(\mathrm{e}^{\kappa t} + \mathrm{e}^{-\kappa t}) = \frac{\ell}{2}\cosh\!\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right). \tag{29}$$

4. Elektrostatik **(20 P.)**

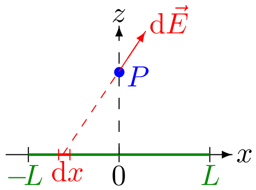
i. (13 P.)

Zur Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ kann man entweder das Feld direkt berechnen, oder erstens das elektrostatische Potential Φ, woraus sich das Feld gemäß $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ ableiten lässt.

Wegen der Symmetrie ist die direkte Bestimmung von $\vec{E}$ etwas einfacher. Jedes infinitesimale Element dx der Ladungsverteilung erzeugt ein infinitesimales Feld d$\vec{E}$ gemäß

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \tag{30}$$

wobei $\vec{r}$ den Abstandsvektor vom Linienelement (bei $x \in [-L, L]$, $z = 0$) zum Punkt P (bei $x = 0$, $z \neq 0$) bezeichnet: $\vec{r} = -x\,\vec{e}_x + z\,\vec{e}_z$, woraus $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ folgt. Da der Punkt P oberhalb des



Mittelpunkts des Streckenabschnitts liegt, kürzen sich die x-Komponenten der Felder d$\vec{E}$, die durch Linienelemente bei x und $-x$ erzeugt sind. Somit ist das resultierende Feld $\vec{E}$ nur entlang z, und man braucht nur die z-Komponente von Gl. (30) zu betrachten, und zwar

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{31}$$

Insgesamt ist das elektrische Feld durch

$$\vec{E} = E_z\,\vec{e}_z = \left(\int_{-L}^{L}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_z$$

gegeben. Dabei gilt

$$\int_{-L}^{L}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\,z}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\,z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right]_{-L}^{L} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2L}{z\sqrt{L^2+z^2}}.$$

Unter Verwendung der Gesamtladung $Q = 2L\lambda$ ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{e}_z}{z\sqrt{L^2+z^2}}. \tag{32}$$

Für $|z| \gg L$ wird dieses Feld zu $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\,\vec{e}_z$, wie zu erwarten ist.

Wenn man das elektrische Feld über das Potential bestimmen will, muss man noch mit der Symmetrie der Anordnung argumentieren: da $\vec{E}$ entlang der z-Achse sein wird, braucht man nur die „z-Abhängigkeit des Potentials“ (genauer gesagt braucht man nur das Potential für Punkte entlang der z-Achse, bei $x = 0$), um daraus

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

abzuleiten. Dieses Potential wird durch

$$\Phi = \int_{-L}^{L} \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \int_{-L}^{L} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

gegeben. Dabei gilt

$$\int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \left[\ln \frac{x+\sqrt{x^2+z^2}}{z}\right]_{-L}^{L} = \ln \frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{z} - \ln \frac{-L+\sqrt{L^2+z^2}}{z} = \ln \frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{-L+\sqrt{L^2+z^2}}.$$

Um das spätere Ableiten einfacher zu machen, kann man noch

$$\begin{aligned}\ln \frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{-L+\sqrt{L^2+z^2}} &= \ln \frac{(L+\sqrt{L^2+z^2})^2}{(-L+\sqrt{L^2+z^2})(L+\sqrt{L^2+z^2})} = \ln \frac{(L+\sqrt{L^2+z^2})^2}{-L^2+(\sqrt{L^2+z^2})^2} \\ &= \ln\left[\frac{(L+\sqrt{L^2+z^2})^2}{L^2}\frac{L^2}{z^2}\right] = 2\ln\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{L} - 2\ln\frac{z}{L}\end{aligned}$$

schreiben, wobei die Argumente der Logarithmen (physikalisch) dimensionslos sind — mathematisch spielen die Nenner L dieser Argumente keine Rolle. Für Punkte auf der z-Achse ist das Potential somit

$$\Phi = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{L} - \ln\frac{z}{L}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\ln\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{L} - \ln\frac{z}{L}\right). \tag{33}$$

Dann liefert eine Ableitung nach z (ohne das Minus-Zeichen zu vergessen) das elektrische Feld (32).

ii. **(7 P.)**

Das durch den Quadrat herrührende elektrische Feld ist dank einem Superpositionsprinzip die Summe aus den Feldern, die durch dessen Kanten — d.h. geradlinige Streckabschnitte — erzeugt werden.

Sei angenommen, dass der Quadrat in der (x, y)-Ebene mit den Kanten parallel zu den Koordinatenachsen liegt, während das Zentrum des Quadrats im Nullpunkt des Koordinatensystems ist. Gesucht ist das Feld $\vec{E}$ in einem Punkt P der z-Achse (Höhe z); aus Symmetriegründen sollte $\vec{E}$ parallel zur z-Richtung sein. Von einer Kante aus gesehen liegt der Punkt P auf einer Gerade, die durch den Mittelpunkt der Kante senkrecht zur Kante liegt, und zwar in einem Abstand $\sqrt{(a/2)^2+z^2}$. Laut dem Ergebnis der Frage **i.** ist der Betrag des Feldes $\vec{E}_i$ $(i = 1,\dots,4)$, das durch die i-te Kante erzeugt wird, durch

$$E_i = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2\right]}} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2}\sqrt{\frac{a^2}{2}+z^2}}$$

gegeben, entsprechend Formel (32) mit den Substitutionen $L \to a/2$ und $z \to \sqrt{(a/2)^2+z^2}$. Dabei ist $\vec{E}_i$ aber nicht parallel zur z-Achse: um den Betrag der Projektion von $\vec{E}_i$ auf die Achse muss man mit dem Cosinus des relevanten Winkels multiplizieren, und zwar $z/\sqrt{(a/2)^2+z^2}$.

Schließlich lautet das gesamte Feld $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0}\frac{4z\,\vec{e}_z}{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+z^2\right]\sqrt{\frac{a^2}{2}+z^2}}. \tag{34}$$

5. Elektrodynamik im Vakuum (30 P.)

i. (8 P.) Die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen sind

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r}) \tag{35a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{r}) = 0 \tag{35b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{0} \tag{35c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}), \tag{35d}$$

mit $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

ii) (2 P.) Die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik lautet

$$\frac{\partial\rho_{\text{el.}}(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t,\vec{r}) = 0. \tag{36}$$

Sie stellt die Erhaltung der elektrischen Ladung dar.

iii) (8 P.)

Die elektromagnetischen Felder $\vec{E},\vec{B}$ lassen sich aus Potentialen ableiten gemäß

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} \tag{37a}$$

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(t,\vec{r}) \tag{37b}$$

Eine allgemeine Eichtransformation der Potentiale lautet

$$\Phi(t,\vec{r}) \to \Phi'(t,\vec{r}) \equiv \Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial\chi(t,\vec{r})}{\partial t}, \tag{38}$$

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \to \vec{A}'(t,\vec{r}) \equiv \vec{A}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{r}) \tag{39}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion χ.

iv) (6 P.) Zur Lösung dieser und der nächsten Frage wird die Identität

$$\vec{\nabla}\times\big(\vec{\nabla}\times\vec{V}\big) = \vec{\nabla}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\big) - \triangle\vec{V} \tag{40}$$

nützlich sein. Angewandt auf die Maxwell–Faraday-Gleichung gibt sie

$$\vec{0} = \vec{\nabla}\times\big[\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{r})\big] + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(t,\vec{r})\big] - \triangle\vec{E}(t,\vec{r}) + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}.$$

Dabei kann man die Maxwell–Gauß-Gleichung im Vakuum $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ verwenden, sowie die partiellen Zeit- und Ortsableitungen im letzten Term austauschen:

$$-\triangle\vec{E}(t,\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r})\big] = \vec{0}.$$

Unter Nutzung der Maxwell–Ampère-Gleichung mit $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$ für $\vec{\nabla}\times\vec{B}(t,\vec{r})$ ergibt sich schließlich

$$-\triangle\vec{E}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = \vec{0}. \tag{41}$$

Betrachtet man nun als Ausgangspunkt die Maxwell–Ampère-Gleichung mit $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$ und bildet man deren Rotation, so ergibt sich

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{r})\big] - \epsilon_0\mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t} = \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{r})\big] - \triangle \vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}$$
$$= -\triangle \vec{B}(t,\vec{r}) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{r})\big],$$

wobei die Maxwell–Thomson-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ benutzt wurde. Das Ersetzen von $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ mithilfe der Maxwell–Faraday-Gleichung im letzten Term führt dann zu

$$-\triangle \vec{B}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t^2} = \vec{0}. \tag{42}$$

v) **(6 P.)**

Das Einsetzen der Beziehungen (37b) und (37a) in die Maxwell–Ampère-Gleichung mit $\vec{\jmath}_{\text{el.}} = \vec{0}$ ergibt unter Berücksichtigung der Formel (40)

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \times \big[\vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{r})\big] - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right]$$
$$= \vec{\nabla}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r})\big] - \triangle \vec{A}(t,\vec{r}) + \epsilon_0\mu_0 \vec{\nabla}\left[\frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t}\right] + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t^2}.$$

Nach trivialer Umschreibung lautet dies

$$-\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle \vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{\nabla}\left[\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r})\right]. \tag{43}$$

In der Lorenz-Eichung

$$\frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r}) = 0 \tag{44}$$

vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$-\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle \vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{0} \tag{45}$$

Setzt man die Beziehung (37a) in die Maxwell–Gauß-Gleichung (**??**) mit $\rho_{\text{el.}} = 0$ ein, so kommt

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \left[-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}\right] = -\triangle \Phi(t,\vec{r}) - \frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r})\big]$$

oder äquivalent

$$\triangle \Phi(t,\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial t}\big[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r})\big].$$

Man kann $\epsilon_0\mu_0\, \partial^2\Phi(t,\vec{r})/\partial t^2$ von beiden Seiten dieser Gleichung abziehen, um die Bewegungsgleichung in eine Form ähnlich der Gl. (45) zu bringen:

$$-\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \Phi(t,\vec{r})}{\partial t^2} + \triangle \Phi(t,\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{r})\right], \tag{46}$$

wobei die rechte Seite in der Lorenz-Eichung (44) verschwindet.