

Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter

Für die „Wissensfragen“ sollten Sie nicht zu viel Text schreiben, sondern sich auf die wichtigen Begriffe / physikalische Ideen / Stichworte fokussieren.

1. Zweidimensionale Bewegung (30 P.)

i. Vorbereitung

Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen? Aus welchem Prinzip werden sie hergeleitet? Definieren Sie die dabei auftretenden Funktionen und physikalischen Größen.

ii. Eine Punktmasse m bewege sich in der Ebene $z = 0$, in welcher ihre Position durch Polarkoordinaten (r, θ) beschrieben wird. Die potentielle Energie der Punktmasse sei

$$V(\vec{r}) = V_0 \ln \frac{r}{r_0} \quad (1)$$

mit zwei positiven Konstanten V_0, r_0 .

a) Wie lautet die Standard-Lagrange-Funktion des Systems? Stellen Sie die entsprechenden Euler–Lagrange-Bewegungsgleichungen auf.

b) Bestimmen Sie die zu (r, θ) kanonisch konjugierten Impulse (p_r, p_θ) und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch die Koordinaten und Impulse aus. Geben Sie die Hamilton’schen Bewegungsgleichungen an.

c) Was ist die physikalische Bedeutung der Bewegungsgleichung für p_θ ? Mit welcher Eigenschaft des Systems hängt dieses Ergebnis zusammen?

2. Bewegung eines Massenpunktes auf einer Zyклоide (30 P.)

Ein Massenpunkt m bewege sich in der (x, z) -Ebene auf der Kurve — einer Zyклоide — mit Gleichung $x(z) = R \arccos(1 - z/R) + \sqrt{2Rz - z^2}$ mit $R > 0$. Das ganze System liegt im Schwerfeld $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Für praktische Berechnungen ist es günstiger, die Zyклоide durch die Parametrisierung

$$x(s) = R(s + \sin s) \quad , \quad z(s) = R(1 - \cos s) \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

zu beschreiben. Drücken Sie die (Standard-)Lagrange-Funktion des Systems durch s und \dot{s} aus und prüfen Sie nach, dass sie sich in der Form

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = 2mR^2 \dot{s}^2 \cos^2 \frac{s}{2} - 2mgR \sin^2 \frac{s}{2} \quad (3)$$

schreiben lässt.

Hinweis: $\cos s = 2 \cos^2 \frac{s}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2}$.

iii. Sei $q \equiv 4R \sin \frac{s}{2}$ eine neue verallgemeinerte Koordinate. Drücken Sie die Lagrange-Funktion (3) durch q und \dot{q} aus. Stellen Sie die entsprechende Euler–Lagrange-Bewegungsgleichung auf. Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

iv. Bestimmen Sie den zu q kanonisch konjugierten Impuls p und drücken Sie die Hamilton-Funktion des Systems durch q und p aus. Geben Sie die Hamilton’schen Bewegungsgleichungen an. Wie sehen die Phasenraumtrajektorien aus?

3. Newtonsche Mechanik mit Reibung und Lorentz-Kraft (25 P.)

Eine Punktladung (Masse m , Ladung q) erfahre die Reibungskraft $-m\gamma\vec{v}$, sowie ein Magnetfeld $\vec{B} = B(t)\vec{e}_z$ mit genau einer solchen Stärke und zeitlicher Abnahme, dass sie auf einer Kreisbahn (Radius R) bleibt. Die Bahnkurve der Punktladung wird durch $\vec{x}(t) = R[C(t)\vec{e}_x + S(t)\vec{e}_y]$ mit $C(t) \equiv \cos[f(t)]$ und $S(t) \equiv \sin[f(t)]$ beschrieben, die Anfangsbedingungen seien $f(0) = 0$ und $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_y$. Bestimmen Sie $f(t)$ und $B(t)$.

4. Elektrostatik: parallele Kreisringe (20 P.)

Zwei Kreisringe (Radius R) seien homogen mit q und $-q$ geladen. Die Ringe seien parallel zur (x, y) -Ebene ausgerichtet und haben ihre Mittelpunkte bei $(x, y, z) = (0, 0, b)$ und $(0, 0, -b)$. Geben Sie die elektrische Ladungsdichte $\rho_{\text{el}}(\vec{r})$ an und berechnen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ in einem weit entfernten Punkt ($|\vec{r}| \gg b$) bis zum Dipolmoment.

5. Elektrodynamik im Vakuum (20 P.)

i. Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von Quelltermen an.

ii. Betrachten Sie den Ansatz

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \alpha \vec{e}_x \cos(\omega t - kz) \quad , \quad \vec{B}(t, \vec{r}) = \beta \vec{e}_y \cos(\omega t - qz) \quad (4)$$

wobei ω eine gegebene Konstante ist. Welche Bedingungen müssen die vier Konstanten k, q, α, β erfüllen, so dass \vec{E} und \vec{B} Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum ($\rho_{\text{el.}} = 0, \vec{j}_{\text{el.}} = \vec{0}$) sind?

6. Magnetisches Dipolmoment und Drehimpuls (15 P.)

Sei eine Stromverteilung bestehend aus N identischen bewegten Punktladungen mit Masse m und elektrischer Ladung q gegeben.

i. Drücken Sie die Stromdichte $\vec{j}_{\text{el.}}(t, \vec{r})$ durch die Positionen $\vec{x}_a(t)$ und Geschwindigkeiten $\vec{v}_a(t)$ der Punktladungen aus.

ii. Die letzteren bewegen sich entlang einer geschlossenen Kurve. Zeigen Sie, dass das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Stromverteilung proportional zum Gesamtdrehimpuls \vec{L} der Punktladungen ist.

Hinweis: $\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{j}_{\text{el.}}(\vec{r}) d^3\vec{r}$.

Es können 140 Punkte erreicht werden.

Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$